3 —



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von

Dr. E. Jahnke,

Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

8. Geh. und in Leinwand geb.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen, sieht sich vergeblich nach kurzen Darstellungen um, die geeignet wären, ihn schnell in das besondere Gebiet, das ihn gerade interessiert, einzuführen. — Diese Lücke will [illegible]

Bisher erschienene Bändchen:

I. **Einführung in die Theorie des Magnetismus.** Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität Tübingen. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] 1908. Geh. *M.* 2.40, geb. *M.* 2.80.

II. **Elektromagnet. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln.** Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] 1908. Geh. *M.* 2.40, geb. *M.* 2.80.

III. **Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus.** Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdoz. a. d. Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908. Geh. *M.* 3.40, geb. *M.* 3.80.

IV. **Die Theorie der Besselschen Funktionen.** Von Dr. P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Geh. *M.* 2.80, geb. *M.* 3.20.

V. **Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven.** Von Dr. E. Jahnke, Prof. a. d. Kgl. Bergakademie Berlin, u. F. Emde, Ingenieur in Berlin. [XII u. 176 S.] 1909. Geb. *M.* 6.—

VI, 1. **Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik.** Von Dr. W. v. Ignatowsky in Berlin. I. Teil. Mit 27 Textfig. [VIII u. 112 S.] 1909. Geh. *M.* 2.60, geb. *M.* 3.—. [II. Teil unter der Presse.]

VII. **Theorie der Kräftepläne.** Von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 100 S.] 1910.

In Vorbereitung:

Grundlagen des Schiffbaues. Von O. Alt, Diplom-Ing. in Kiel.

Gastheorie. Von Dr. A. Byk, Privatdozent a. d. Universität u. Techn. Hochschule Berlin.

Die mathematischen Instrumente. Von Dr. A. Galle, Professor am Geodätischen Institut bei Berlin.

Potentialtheorie. Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität Tübingen.

Getriebelehre. Von Staatsrat Dr. M. Grübler, Professor an der Techn. Hochschule Dresden.

Schwingungsprobleme. Von Dr. E. Grüneisen, Privatdozent an der Universität Berlin.

Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Danzig.

Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik. Von Dr. Th. von Karman an der Universität Göttingen.

Thermoelektrizität. Von Dr. F. Krüger, Privatdozent an der Universität Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Über Berechnung spezieller elektrischer und magnetischer Felder. Von Dr.-Ing. u. Dr. phil. L. Lichtenstein in Charlottenburg.

Einführung in die Elastizitätstheorie. Von R. Marcolongo, Prof. an der Univ. Neapel.

Technische Hydromechanik. Von Dr. R. Edler von Mises, Ingenieur in Straßburg i. E.

Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Dr. J. Möller, Oberlehr. i. Elsfleth.

Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Prof. an der Universität Gießen.

Die Grundlagen der Wechselstromtechnik. Von Prof. Dr. E. Orlich, Mitglied der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Die Streuung des Transformators. Von Dr.-Ing. W. Rogowski a. d. Physik.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg.

Die Fourierschen Reihen. Von Dr. R. Rothe, Prof. a. d. Kgl. Bergakademie Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von Dr. R. Rothe, Professor an der Kgl. Bergakademie Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr.-Ing. R. Rüdenberg in Berlin.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von Dr. G. Rümelin, Privatdoz. a. d. Univ. Freiburg.

Seismik. Von Dr. H. Schering an der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Theorie der Planeten-Finsternisse. Von Dr. P. Schwahn, Direktor der Gesellschaft und Sternwarte „Urania" i. Berlin.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Prof. a. d. Techn. Hochschule Brünn.

Temperaturmessungen. Von Dr. S. Valentiner, Dozent a. d. Techn. Hochschule Hannover.

☞ Die Sammlung wird fortgesetzt.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
7

DIE THEORIE DER KRÄFTEPLÄNE

EINE EINFÜHRUNG IN DIE GRAPHISCHE STATIK

VON

H. E. TIMERDING
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

MIT 46 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Vorwort.

Das vorliegende Bändchen enthält einen Versuch, die Theorie der Kräftepläne, so wie sie aus dem festen Boden der Technik heraus in die luftigen Regionen der geometrischen Spekulation hineinwächst, im Zusammenhange darzustellen. Es erschien mir nicht verdienstlos, die zahlreichen und an vielen Orten verstreuten Untersuchungen, die in der Theorie der Kräftepläne ihren gemeinsamen Ausdruck finden, aber nach Ziel und Methode weit auseinandergehen, zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufassen und ihre Entwicklung nach einem konsequent durchgeführten analytischen Verfahren zu versuchen. Dieser Versuch ist insofern unvollständig geblieben, als er neben der allgemeinen Theorie des ebenen Kräftesystems nur die statisch bestimmten ebenen Fachwerke berücksichtigt. Schon der geringe Umfang dieses Büchleins ließ es nicht anders möglich erscheinen. Aber durch das Abbrechen beim Einsetzen der elastizitätstheoretischen Untersuchungen kam gleichzeitig, wie ich glaube, eine gewisse Geschlossenheit in die Behandlung des Gegenstandes, der so prinzipiell auf die elementare Statik beschränkt blieb. Dies ermöglichte, was ebenfalls von Wichtigkeit erschien, zugleich eine große Beschränkung in den benutzten Hilfsmitteln. Die Infinitesimalrechnung konnte ganz beiseite bleiben, und es brauchten außer der Elementargeometrie nur die ersten Elemente der analytischen Geometrie herangezogen zu werden, das Maß der vorausgesetzten Kenntnisse ist also nicht groß.

Das Schwergewicht der kleinen Monographie liegt auf der theoretischen Seite, in dem geometrischen Interesse der behandelten Fragen. Ein Lehrbuch für einen Teil der graphischen Statik

wollte und konnte ich nicht liefern. Ein solches ist heutigentages ohne ein Eingehen auf die Festigkeitslehre in irgendwelcher Form unmöglich. Der Zweck dieser Darstellung ist demnach ein viel bescheidenerer. Sie soll dem Techniker zeigen, daß er auch von scheinbar abstrakten Theorien Förderung und Klärung finden kann, und auf der anderen Seite wird der Mathematiker, wie ich glaube, nicht ohne Wohlgefallen sehen, wie dicht am Wege der Praxis die schönsten Blumen der Theorie blühen.

Braunschweig, im Oktober 1909.

H. E. Timerding.

Inhaltsübersicht.

Bedingung dafür, daß Gleichgewicht zwischen den Kräften am Punkte A besteht, ist dann einfach die, daß der Streckenzug sich zu einem Polygon schließen muß, indem der Endpunkt der letzten Kraft mit dem Anfangspunkt der ersten Kraft zusammenfällt. Es ist ein leicht zu beweisender geometrischer Satz, daß dieses Sichschließen von der Reihenfolge, in der die Kräfte aneinander gelegt werden, unabhängig ist.

Schließt der Streckenzug sich nicht, so heißt die Kraft, die durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten Kraft mit dem Endpunkte der letzten Kraft dargestellt wird, die Resultante des Kräftesystems. Kehrt man die Richtung der Resultante um, ohne ihre Größe zu ändern, d. h. vertauscht man sie mit der ihr entgegengesetzten Kraft, so bringt sie, dem Kräftesystem hinzugefügt, dasselbe ins Gleichgewicht.

Wie ein Kräftesystem zu einer Resultanten vereinigt wird, kann auch eine Einzelkraft in Komponenten oder Seitenkräfte zerlegt, d. h. durch ein Kräftesystem ersetzt werden, dessen Resultante sie bildet. Ist die Anzahl der Komponenten zwei, so können ihre Richtungen beliebig vorgeschrieben werden, dadurch sind sie selbst in eindeutiger Weise bestimmt. Ein einfaches Beispiel liefert der in Fig. 1 dargestellte schräg aufgestützte Balken. Er repräsentiert eine Kraft R im Stützpunkt A, deren Richtung mit der Richtung des Balkens zusammenfällt. Um den für das Auflager sich ergebenden Vertikaldruck V und Horizontalschub H zu berechnen, zieht man im Kräfteplan durch die Endpunkte der die Kraft R repräsentierenden Strecke eine horizontale und eine vertikale Linie; so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich R ist und dessen Katheten die Kräfte V und H liefern.

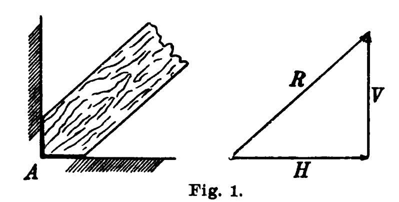


Fig. 1.

Die weitere praktische Verwendung der Polygonregel für die an demselben Punkte angreifenden Kräfte beruht darauf, daß, wenn die Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen, diese Punkte durch Balken, Stangen oder Seile miteinander verbunden werden. Jede derartige Verbindung repräsentiert zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die auf ihre Endflächen oder Endpunkte

in ihrer Richtung wirken. Wir wollen dies zunächst an ein paar Beispielen erläutern.

Als erstes Beispiel nehmen wir die in Fig. 2 gezeichnete krahnartige Konstruktion. In *D* ist eine Last *P* angehängt, und wir suchen zuerst die in *D* angreifenden und durch die Stangen *DB* und *DC* gelieferten Kräfte, welche der Last *P* das Gleichgewicht halten, indem wir das Dreieck (*d*) zeichnen, von welchem eine Seite vertikal und gleich *P*, die anderen Seiten parallel zu *DB* und *DC* sind. Diese Seiten geben, genommen in dem Umlaufssinne, der in der vertikalen Seite des Dreiecks abwärts geht, die gesuchten Kräfte. Die in den Stab *DC* fallende Kraft kehren wir um, um die in *CD* an *C* wirkende Kraft zu finden, und suchen durch das Dreieck (*c*) zu dieser Kraft die ihr das Gleichgewicht haltenden und in den Stäben *CB* und *CA* an *C* wirkenden Kräfte. Die letztere dieser beiden Kräfte repräsentiert sofort den Zug *Q* an dem festen Punkte *A*, die in den Stäben *CB* und *DB* gefundenen Kräfte ergeben, in (*b*) zu einer Resultanten vereinigt, den Druck *R* auf den festen Punkt *B*.

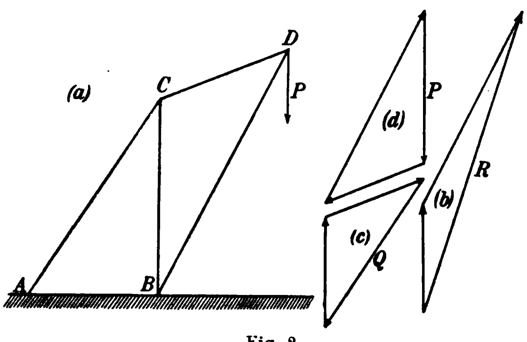


Fig. 2.

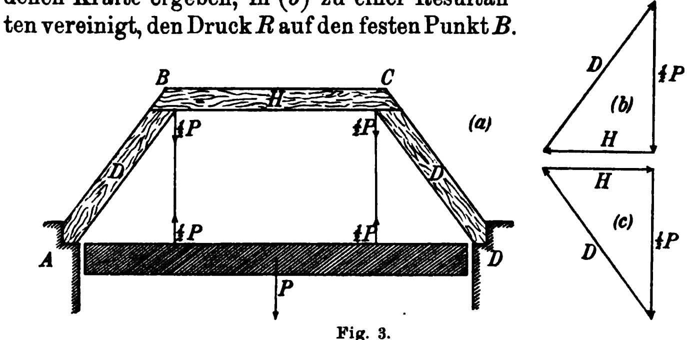


Fig. 3.

Wir wählen als weiteres Beispiel ein einfaches Sprengwerk, wie es Fig. 3 zeigt. An der Balkenverbindung *ABCD* ist in *B*

und C die Last P aufgehängt und verteilt sich auf diese beiden Punkte. Wegen der Symmetrie der Figur muß auf jeden der beiden Punkte die Hälfte der Last, $\frac{1}{2}P$, entfallen. Nun wird für beide Punkte mit $\frac{1}{2}P$ als einer vertikalen Seite ein Dreieck konstruiert, dessen andere beiden Seiten die Richtungen der durch den betreffenden Punkt gehenden Balken haben. Die für den horizontalen Balken auf diese Weise gefundenen zwei Kräfte H werden dabei, wie es sein muß, einander entgegengesetzt gleich. Die in die schrägen Balken fallenden Kräfte D müssen noch ausgeglichen werden durch die in ihren Stützpunkten A, B von der Unterlage ausgeübten Kräfte, die in der durch Fig. 1 angegebenen Weise zu finden sind. Die so ermittelte horizontale Auflagerkraft wird aber wieder gleich H und ist nach innen zu gerichtet, die vertikale Komponente ist gleich $\frac{1}{2}P$ und nach oben hin gerichtet.

Ein weiteres Beispiel liefert der untenstehend gezeichnete hölzerne Dachstuhl. In den Punkten A_1, A_5 mögen die vertikal aufwärts wirkenden Kräfte R, in A_2, A_4 die Lasten P, in A_3 die Last Q wirken. Man suche zunächst in A_1, A_5 die in den Balken wirkenden Kräfte, welche in diesen Punkten den Auflagerkräften R das Gleichgewicht halten. Dies ist in der Figur 5 (1) ausgeführt. Darauf suche man in den Punkten A_2, A_4 das Gleichgewicht herzustellen, indem man jetzt die in die Balkenstücke A_1A_2, A_4A_5 fallenden Kräfte entgegengesetzt gleich den vorher gefundenen Kräften O_1, U_1 annimmt. Dies wird durch die Figur (2) ausgeführt. Man findet so die Kraft O_2 in dem Balkenstück A_2A_3 und die Kraft D in dem Stützbalken A_2A_6. Darauf bewirke man das Gleichgewicht im Punkte A_6 dadurch, daß man zu den

Fig. 4.

Kräften, die man in den durch diesen Punkt gehenden Balken bereits gefunden hat und die man für die symmetrisch gelegenen Balken sofort ergänzen kann, die entgegengesetzt gleichen Kräfte nimmt und eine Kraft V in dem Balken $A_6 A_3$, also. in vertikaler Richtung, hinzufügt, welche die vorigen Kräfte ins Gleichgewicht setzt. Da die horizontalen Kräfte in den Balkenstücken $A_6 A_1$ und $A_6 A_5$ sich sofort zerstören, hat man nur die transversalen Kräfte D zu berücksichtigen und kann aus ihnen die vertikale Kraft V sofort herleiten, wie es in der Figur (3) geschieht. Endlich stelle man auf Grund desselben Prinzips mit Hilfe der Figur (4) in A_3 Gleichgewicht her, was nur möglich ist, indem man die Last Q geeignet annimmt, und zwar ergibt sich aus den Figuren, daß man

$$Q = 2R - 2P$$

zu machen hat. Dies zeigt sich in voller Deutlichkeit, wenn man die verschiedenen Figuren samt zwei sie symmetrisch ergänzenden für die Punkte A_4, A_5 zu einer einzigen Figur zusammenlegt, indem man je zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Strecken, die in zwei verschiedenen Teilfiguren vorkommen und die zwei Kräfte in einem Balkenstück darstellen, in der Gesamtfigur zusammenfallen läßt. Die äußeren Kräfte kommen dann alle in dieselbe Vertikale zu liegen, und die Summe der beiden Auflagerkräfte R, R muß der Summe der drei Lasten P, Q, P gleich werden.

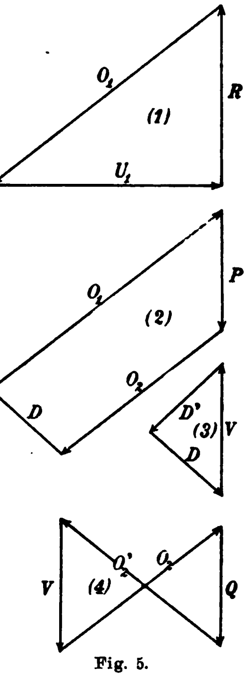


Fig. 5.

Die so gefundene Gesamtfigur ist der Kräfteplan des Dachstuhles. Dieser Kräfteplan tritt sonach hier auf als ein in einem Plane vereinigtes System von Kräftepolygonen, die alle derart mit einem bestimmten Umlaufssinne behaftet sind, daß irgendeine, zweien von ihnen gemeinsame Seite beim

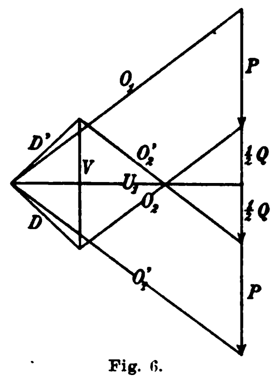


Fig. 6.

Umlaufen der beiden Polygone in entgegengesetztem Sinne durchfahren wird.

Ein weiteres, sehr anschauliches Beispiel für einen derartigen Kräfteplan liefert ein einfacher eiserner Sägedachbinder, wie er bei Fabrikanlagen häufig vorkommt. $A_4 A_1$ ist die steile Seite, auf der das Licht einfällt; $A_1 A_2 A_3$ das als Wetterschutz dienende Dach. Das Dach wird durch den horizontalen

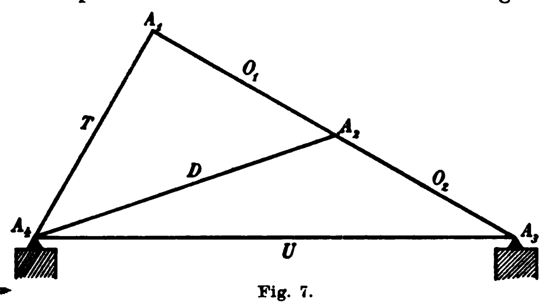


Fig. 7.

Balken $A_4 A_3$ abgeschlossen, und als weitere Versteifung ist der schräge Balken oder Stab $A_4 A_2$ eingefügt. Von der Gesamtlast mögen gleiche Teile P auf die Punkte A_1, A_2 entfallen, während in A_4 und A_3 die vertikal nach aufwärts gerichteten Auflagerkräfte Q, Q' wirken, die nicht bekannt, sondern noch zu bestimmen sind. Wir beginnen damit, durch Fig. 8 (2) am Punkte A_1 Gleichgewicht her-

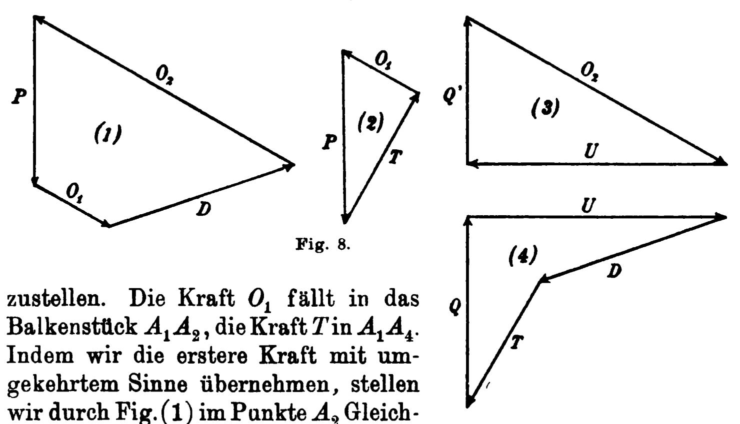


Fig. 8.

zustellen. Die Kraft O_1 fällt in das Balkenstück $A_1 A_2$, die Kraft T in $A_1 A_4$. Indem wir die erstere Kraft mit umgekehrtem Sinne übernehmen, stellen wir durch Fig. (1) im Punkte A_2 Gleichgewicht her. Die Kraft O_2 fällt in $A_2 A_3$, die Kraft D in $A_2 A_4$. Nun nehmen wir die umgekehrten Kräfte T, D für den Punkt A_4 und bringen sie durch eine vertikale Kraft Q und eine horizontale Kraft U, die in den Balken $A_4 A_3$ fällt, ins Gleichgewicht mit Hilfe

der Fig. (4). Endlich zeigt Fig. (3), wie man die umgekehrten Kräfte U und O_2 durch eine vertikale Kraft Q' in A_3 ausgleicht. Legt man die Figuren (1), (2) einerseits und (3), (4) anderseits zu je einem Vierecke zusammen, so werden diese Vierecke kongruent. Aus der Gleichheit ihrer vertikalen Seiten folgt

$$Q + Q' = 2P.$$

Legen wir die beiden Vierecke, die wir uns aus dem Zeichenpapier ausgeschnitten denken, aufeinander und heften ihre Ränder, mit Ausnahme des vertikalen Randes, aneinander, so entsteht der gesuchte Kräfteplan. Er ist hier als eine einfach zusammenhängende, zweiblättrige ebene Fläche zu deuten, die mit einer Papiertüte oder einer Papiermütze, wie sie sich Kinder herzustellen pflegen, verglichen werden kann.

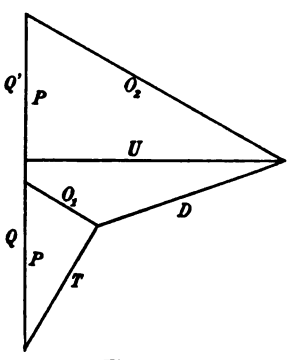


Fig. 9.

Wir wollen noch als ein letztes Beispiel einen eisernen Vordachbinder behandeln, wie ihn Fig. 10 zeigt. In B, B_1, B_2, B_3 wirken der Reihe nach die Lasten $\frac{1}{2}P$, P, P, $\frac{1}{2}P$, außerdem wirkt in B eine noch unbekannte Horizontalkraft H, die durch die Befestigung des Fachwerkes in der Wand geliefert wird, und ebenso in dem festen Drehpunkt A eine Kraft W von noch zu bestimmender Größe und Richtung. Zunächst suchen wir in B_3 die in die Richtungen B_3B_2 und B_3A_2 fallenden Kräfte O_3, U_3, welche der Vertikalkraft $\frac{1}{2}P$ das Gleichgewicht halten. Darauf bestimmen wir in B_2 die in die Richtungen B_2B_1 und B_2A_2 fallenden Kräfte O_2, D_2, welche der Last P und der umgekehrten Kraft O_3 das Gleichgewicht halten, sodann in A_2 zu den umgekehrten Kräften D_2 und U_3 die ihnen das Gleichgewicht haltenden und in die Richtungen A_2B_1 und A_2A_1 fallenden Kräfte, T_2 und U_2. Weiter werden in B_1 die Last P und die umgekehrten Kräfte O_2 und T_2 durch zwei in

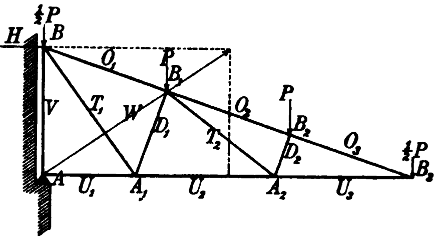


Fig. 10.

die Richtungen B_1B und B_1A_1 fallende Kräfte O_1 und D_1 ins Gleichgewicht gebracht und in A_1 die umgekehrten Kräfte D_1 und U_2 durch zwei in die Richtungen A_1B und A_1A fallende Kräfte T_1 und U_1. Bringt man in B die umgekehrten Kräfte O_1 und T_1 und die Last $\frac{1}{2}P$ ins Gleichgewicht durch eine horizontale Kraft H und eine vertikale Kraft V, die durch den Stab BA aufgenommen wird, so ist H der durch die Wand in B auf das Fachwerk ausgeübte Zug. Vereinigt man die umgekehrten Kräfte V und U_1 in A zu einer Resultanten, so ist diese die Druckkraft, welche das Fachwerk auf den festen Drehpunkt A ausübt.

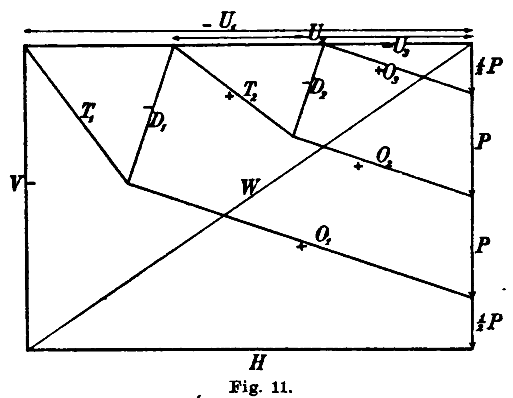


Fig. 11.

Alle Kräftepolygone, welche bei dieser Aufgabe verwendet worden sind, lassen sich zusammenlegen zu einem Kräfteplan mit rechteckiger Umgrenzung. Die horizontale Seite dieses Rechteckes ist H, seine vertikale Seite V und seine Diagonale liefert die Auflagerkraft W.

Zweites Kapitel.

Das Seileck.

Wir betrachten jetzt ein Hängewerk von der beistehend gezeichneten allgemeinen Form. Die Aufhängepunkte A, B mögen in derselben Horizontalen liegen. Die Form des Streckenzuges $AA_1A_2A_3B$ aber ist derart, daß die Punkte A_1, A_2, A_3 auf irgendwelchen Vertikalen zwischen A und B liegen. Ihre Anzahl kann beliebig vermehrt werden; ebenso ist die Größe der in ihnen angebrachten

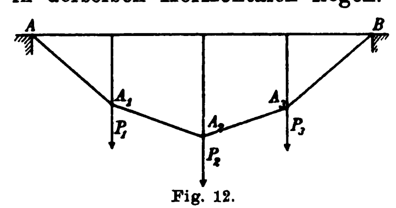


Fig. 12.

Lasten P_1, P_2, P_3 keiner Einschränkung unterworfen. Jedes geradlinige Stück des Streckenzuges, gleichgültig, aus welchem Material es in Wirklichkeit besteht, ob es ein Seil, einen Holzbalken oder einen Eisenstab repräsentiert, haben wir uns unter der Einwirkung zweier entgegengesetzt gleichen und der Richtung nach mit der Strecke selbst zusammenfallenden Kräfte zu denken. Die Größe dieser Kräfte sei für die Strecken AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3B der Reihe nach gleich S_0, S_1, S_2, S_3.

Die Bedingung des Gleichgewichtes an den Punkten A_1, A_2, A_3 erfordert nun, daß sich z B. aus S_0, S_1, P_1 ein Dreieck bilden läßt, von dem die Seite P_1 vertikal ist und die Seiten S_0, S_1 den zugehörigen Strecken des Streckenzuges parallel sind. Die drei Dreiecke, die so entstehen, lassen sich zu einer einzigen Figur vereinigen. Diese Figur besteht aus den in einer Vertikalen v aneinander gelegten Strecken P_1, P_2, P_3 und den Strecken S_0, S_1, S_2, S_3, die aus einem Punkte O nach den Begrenzungspunkten C_0, C_1, C_2, C_3 von P_1, P_2, P_3 hinlaufen.

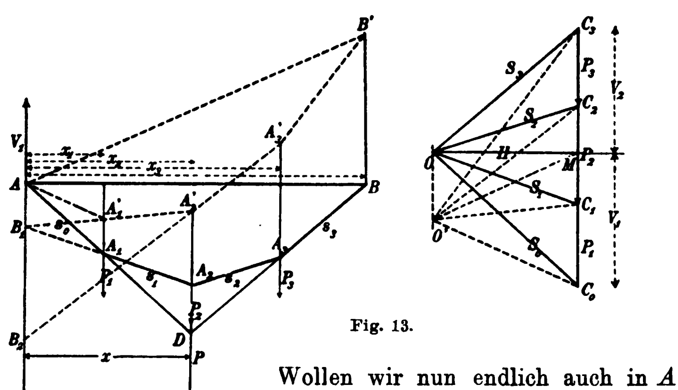


Fig. 13.

Wollen wir nun endlich auch in A und B Gleichgewicht herstellen durch Hinzufügung je einer horizontalen Kraft H_1, H_2 und einer vertikalen Kraft V_1, V_2, so haben wir aus S_0, V_1, H_1 einerseits und S_3, H_2, V_2 andererseits je ein Dreieck zu bilden. Diese Dreiecke erhalten wir aber sofort, wenn wir in der vorigen Figur aus O auf die Vertikale v das Lot OM fällen. Die Dreiecke sind dann OMC_0 und OMC_3, die Horizontalkräfte in A, B werden einander entgegengesetzt gleich, und ihre Größe H wird durch die Strecke OM angegeben; die

Vertikalkräfte werden durch die Strecken C_0M und MC_3 repräsentiert.

Wir haben so aus der Figur insgesamt fünf Dreiecke, jedes Dreieck mit einem bestimmten Umlaufungssinne, zu entnehmen. Jede gemeinsame Seite zweier Dreiecke wird zweimal, in entgegengesetztem Sinne, durchlaufen. Auch das Stück der Vertikalen v von C_3 bis C_1 wird zweimal, einmal abwärts durch die Kräfte P_3, P_2, P_1, das andere Mal aufwärts durch die Kräfte V_1, V_2 durchlaufen. Alle Dreiecke zusammengenommen überdecken ein dreieckiges Stück der Ebene doppelt.

Denken wir uns die Strecken AA_1 und BA_3 verlängert, bis sie sich in einem Punkte D schneiden und fällen von D das Lot DE auf AB, so wird

$$\Delta AED \sim \Delta OMC_0, \quad \Delta BED \sim \Delta OMC_3,$$

denn die Seiten dieser Dreiecke sind paarweise parallel. Daraus folgt

$$MC_0 : OM = ED : AE, \quad C_3M : OM = ED : EB,$$

mithin

$$MC_0 : C_3M = EB : AE$$

oder

$$V_1 : V_2 = l - x_s : x_s, \tag{1}$$

wenn wir $AE = x_s$, $AB = l$ setzen.

Bringen wir in D eine Last, d. h. eine nach abwärts gerichtete Vertikalkraft, von der Größe

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \tag{2}$$

an, so läßt diese sich, wie die Figur des Kräfteplans sofort zeigt, in die Seitenkräfte C_3O und OC_0 zerlegen, d. h. in dieselben Kräfte, die in A und B angriffen. Besteht ein Hängewerk also nur aus den Strecken AD und DB und ist die in D angebrachte Last die einzige wirkende, so werden die Reaktionskräfte in A und B dieselben wie vorher. Die in D wirkende Kraft P heißt dann die Resultante der parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3.

Verlängern wir anderseits jede Strecke des Streckenzuges $AA_1A_2A_3B$ rückwärts, bis sie die Vertikale von A trifft, und seien die Punkte, die wir so auf dieser Vertikalen bekommen, der Reihe nach A, B_1, B_2, B_3, so wird

$$\Delta OC_0C_1 \sim \Delta A_1AB_1, \quad \Delta OC_1C_2 \sim \Delta A_2B_1B_2,$$
$$\Delta OC_2C_3 \sim \Delta A_3B_2B_3.$$

Haben die Vertikalen der Punkte A_1, A_2, A_3, B von der Vertikalen des Punktes A der Reihe nach die Abstände x_1, x_2, x_3, l, so ergibt sich demnach, da $C_1 C_0 = P_1$, $C_2 C_1 = P_2$, $C_3 C_2 = P_3$ und die gemeinsame Höhe der zugehörigen Dreiecke $OM = H$ ist,

$$P_1 : H = AB_1 : x_1, \quad P_2 : H = B_1 B_2 : x_2, \quad P_3 : H = B_2 B_3 : x_3,$$

woraus

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = AB_3 \cdot H.$$

Da aber auch $\Delta O C_0 C_3 \sim \Delta DAB_3$, folgt noch $P : H = AB_3 : x_s$ oder $Px_s = AB_3 \cdot H$, und somit wird

$$(3) \qquad P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = Px_s.$$

Diese Gleichung dient dazu, x_s zu berechnen. Ihre linke Seite ist das **statische Moment** $\mathfrak{M}$ des gegebenen Systems paralleler Kräfte für den Punkt A oder einen beliebigen Punkt der Vertikalen von A, nämlich die Summe der Produkte aller Kräfte in den Abstand ihrer Wirkungslinie von A. Die rechte Seite gibt entsprechend das statische Moment der resultierenden Kraft P, und es ergibt sich

$$\mathfrak{M} = AB_3 \cdot H.$$

Das Stück AB_3 wird von der ersten und letzten Seite des Streckenzuges $AA_1A_2A_3B$ oder, wie wir sagen werden, des **Seilecks** auf der Vertikalen von A abgeschnitten. Aus diesem Stück AB_3 geht das statische Moment hervor durch Multiplikation mit dem **Polabstande** H.

Da $V_1 + V_2 = -P$ ist, so folgt aus der früher gefundenen Gleichung (1) mit Leichtigkeit

$$(4) \qquad V_1 \cdot l = -P \cdot (l - x_s), \quad V_2 \cdot l = -P \cdot x_s.$$

Das statische Moment $\mathfrak{M} = Px_s$ wird, abgesehen vom Vorzeichen, also auch durch das statische Moment der Vertikalkraft V_2 für den Punkt A gegeben.

Senken oder heben wir die Punkte A_1, A_2, A_3, B in ihren Vertikalen um Stücke $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho l$, die ihren Abständen von der Vertikalen des Punktes A proportional sind, wobei sie in die Punkte A_1', A_2', A_3', B' übergehen mögen, dann schneiden sich die Linien A_1A_2 und $A_1'A_2'$, ebenso die Linien A_2A_3 und $A_2'A_3'$ und endlich A_3B und $A_3'B'$ allemal auf der Vertikalen von A. Ziehen wir zu den Linien AA_1', $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_3'B'$ die Parallelen durch C_0, C_1, C_2, C_3, so schneiden diese Linien sich wieder in

einem einzigen Punkte O', der vertikal unter O in dem Abstande ϱH liegt, und die Linie MO' wird parallel zu der neuen Abschlußlinie AB'.

Dies alles ist leicht einzusehen, wenn man die Ähnlichkeit der so entstehenden Dreieckspaare $AA_1'A_1$ und $C_0O'O$, $B_1A_2'A_2$ und $C_1O'O$ usw. schließlich von $AB'B$ und $MO'O$ beachtet. Es folgt daraus aber die Konstruktion des Hängewerkes, wenn außer den Punkten A, B die Kräfte P_1, P_2, P_3 und die Vertikalen, in denen sie wirken, gegeben sind. Man lege zunächst die Kräfte P_1, P_2, P_3 in einer Vertikalen v aneinander und nehme den Pol O' beliebig an. Von ihm ziehe man die Strahlen nach den Begrenzungspunkten C_0, C_1, C_2, C_3 der Kräfte und zu diesen Strahlen im Lageplan, von A anfangend, die Parallelen jedesmal bis zur nächsten Vertikalen, so daß der Streckenzug $AA_1'A_2'A_3'B'$ entsteht, in dem B' in der Vertikalen von B liegt. Dann ziehe man durch O' die Parallele zu $B'A$, die aus der Vertikalen v den Punkt M ausschneidet, und konstruiere O als Schnittpunkt der Horizontalen durch M mit der Vertikalen durch O'. Die Parallelen zu den Strahlen OC_0, OC_1, OC_2, OC_3 liefern dann das gesuchte Hängewerk $AA_1A_2A_3B$.

Verschiebt man den Pol O horizontal, so ändern sich die Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3 von der Linie AB um Beträge, die ihren Werten proportional sind. Ist y der alte, y' der neue Wert einer dieser Ordinaten, so wird

$$(5) \qquad y' : y = H : H',$$

wenn H den alten, H' den neuen Polabstand bezeichnet. Den sehr einfachen Beweis hierfür dürfen wir wohl übergehen.

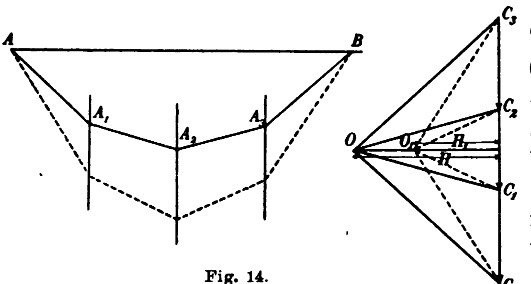


Fig. 14.

Bezeichnen wir mit y die Ordinate P_0P eines Punktes P auf der Strecke A_1A_2, mit x die zugehörige Abszisse, mit x_1, y_1 die Koordinaten von A_1 selbst, so ergibt sich infolge des Zusammenhanges des Lageplans mit dem Kräfteplan aus zwei Paaren ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke sofort

$$y_1 : x_1 = V_1 : H, \quad (y - y_1) : (x - x_1) = (V_1 - P_1) : H$$

und hieraus weiter

(6) $y \cdot H = x V_1 - (x - x_1) P_1$.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt aber mit Leichtigkeit für beliebiges x

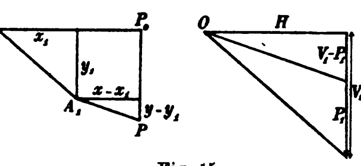


Fig. 15.

(7) $P_1(x - x_1) + P_2(x - x_2) + P_3(x - x_3) - V_1 x - V_2(l - x) = 0$,

d. h. das statische Moment der fünf parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3, V_1, V_2 verschwindet für einen beliebigen Punkt. (Die Kräfte V_1, V_2 sind als aufwärts gerichtet negativ in Rechnung zu setzen.) Damit aber wird die vorher für y gefundene Gleichung auch

(6a) $y \cdot H = (x - x_2) P_2 + (x - x_4) P_3 - (l - x) V_2$.

Das Produkt aus der Ordinate y und dem Polabstand H wird also durch das statische Moment der links oder der rechts von der betreffenden Vertikalen liegenden Kräfte gegeben. Dieses statische Moment heißt das Biegungsmoment für den betreffenden Punkt. Das Biegungsmoment wird sonach durch die Ordinaten der Figur $A A_1 A_2 A_3 B$ gegeben, wenn man dieselben noch mit dem Polabstand H multipliziert. Es ist nämlich leicht zu sehen, daß, was für einen Punkt der Strecke $A_1 A_2$ bewiesen ist, für jeden Punkt des Streckenzuges $A A_1 \cdots B$ gilt.

Fassen wir die Figur $A A_1 A_2 A_3 B$ als ein geschlossenes Polygon auf, so sehen wir, daß in jeder Seite dieses Polygons zwei in den Endpunkten der Seite angreifende Kräfte wirken. Außerdem greifen in den Endpunkten des Polygons die „äußeren“ Kräfte V_1, P_1, P_2, P_3, V_2 an, und zwischen den Kräften an jedem einzelnen Eckpunkte besteht Gleichgewicht. Die Bedingungen dieses Gleichgewichtes werden durch die Figur des Kräfteplans graphisch gegeben.

Das hiermit erledigte Problem hat die Besonderheit, daß die äußeren Kräfte parallel gerichtet sind. Wenn wir diese beschränkende Voraussetzung fallen lassen, aber, um die Vorstellung zu fixieren, bei fünf Kräften stehen bleiben, so ergibt sich folgendes allgemeinere Bild: Wir haben ein Fünfeck $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ vor uns, das Seileck, jede Seite desselben repräsentiert zwei in ihr wirkende entgegengesetzt gleiche Kräfte, und außerdem greifen in seinen Ecken beliebig gerichtete äußere Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 an. Da dann an jeder Ecke Gleichgewicht bestehen soll, müssen

sich fünf Dreiecke finden lassen, von denen jedesmal eine Seite durch eine der äußeren Kräfte der Größe und Richtung nach gegeben wird, während die anderen beiden Seiten den in dem Angriffspunkt der betreffenden äußeren Kraft zusammenstoßenden Seileckseiten parallel sind. Die letzteren Dreieckseiten repräsentieren der Größe und Richtung nach die beiden Seilkräfte. Da diese Kräfte aber paarweise entgegengesetzt gleich ausfallen sollen, gilt dasselbe auch von den in Rede stehenden Kräftedreiecken, die man sich mit einem bestimmten Umlaufssinne behaftet zu denken hat. Dieser Umlaufssinn ist dadurch gegeben, daß die, die äußere Kraft darstellende, Dreieckseite in dem Sinne dieser Kraft durchlaufen werden muß.

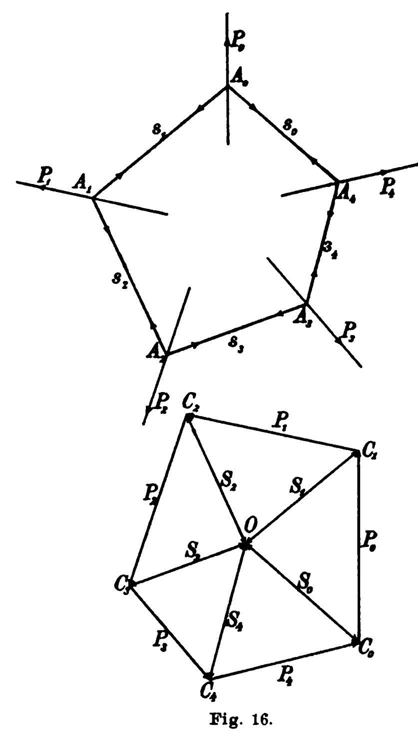


Fig. 16.

Demnach zeigt sich, daß sich hier wieder die fünf Dreiecke zu einer einzigen Figur, dem Kräfteplan, zusammenlegen lassen. Dabei enden die, die Seilkräfte repräsentierenden, Dreieckseiten alle in demselben Punkt, dem Kräftepol O. Die, die äußeren Kräfte repräsentierenden, Seiten hingegen schließen sich zu einem Polygon von bestimmtem Umlaufssinne, dem Kräftepolygon oder Krafteck, zusammen. Die Ecken dieses Polygons wollen wir mit $C_0\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4$ bezeichnen, die Strecken OC_0, OC_1 usw., welche die Seilkräfte darstellen, mit S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.

Wir wollen nun ein System rechtwinkliger kartesischer Koordinaten einführen, dessen Achsenrichtungen beliebig sind, dessen Ursprung aber in den Punkt C_0 fällt. In diesem Koordinatensystem seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Koordinaten des Kräftepols O, ferner

$$\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{Y}_1;\ \mathfrak{X}_2,\ \mathfrak{Y}_2;\ \mathfrak{X}_3,\ \mathfrak{Y}_3;\ \mathfrak{X}_4,\ \mathfrak{Y}_4$$

der Reihe nach die Koordinaten der Punkte C_1, C_2, C_3, C_4.

Wir wollen auch die Ecken des Seilecks auf dieses Koordinatensystem beziehen, und zwar seien

$$x_0, y_0;\; x_1, y_1;\; x_2, y_2;\; x_3, y_3;\; x_4, y_4$$

der Reihe nach die Koordinaten der Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

Daß die Seileckseiten s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 den Strecken S_0, S_1 usw. der Reihe nach parallel sind, drückt sich dann durch die Proportionen aus:

$$(x_0 - x_4) : (y_0 - y_4) = \mathfrak{X} : \mathfrak{Y},$$
$$(x_1 - x_0) : (y_1 - y_0) = (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1) : (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1)$$

usw., die sich auch schreiben lassen:

$$(8) \quad \begin{cases} (y_0 - y_4)\mathfrak{X} - (x_0 - x_4)\mathfrak{Y} = 0, \\ (y_1 - y_0)(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1) - (x_1 - x_0)(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1) = 0, \\ (y_2 - y_1)(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_2) - (x_2 - x_1)(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_2) = 0, \\ (y_3 - y_2)(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_3) - (x_3 - x_2)(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_3) = 0, \\ (y_4 - y_3)(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_4) - (x_4 - x_3)(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_4) = 0. \end{cases}$$

Wir bezeichnen noch die Komponenten der äußeren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 der Reihe nach mit

$$X_0, Y_0;\; X_1, Y_1;\; X_2, Y_2;\; X_3;\; Y_3;\; X_4, Y_4,$$

dann wird, da das Kräftepolygon sich schließt,

$$(9) \quad X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0, \quad Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0.$$

Ferner ergibt sich:

$$X_0 = \mathfrak{X}_1,\; Y_0 = \mathfrak{Y}_1;\; X_1 = \mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1,\; Y_1 = \mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1;\ldots,$$

woraus umgekehrt folgt:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = X_0, & \mathfrak{Y}_1 = Y_0, \\ \mathfrak{X}_2 = X_0 + X_1, & \mathfrak{Y}_2 = Y_0 + Y_1, \\ \mathfrak{X}_3 = X_0 + X_1 + X_2, & \mathfrak{Y}_3 = Y_0 + Y_1 + Y_2, \\ \mathfrak{X}_4 = X_0 + X_1 + X_2 + X_3, & \mathfrak{Y}_4 = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3. \end{cases}$$

Wir setzen endlich noch

$$Z_0 = Y_0 x_0 - X_0 y_0,\quad Z_1 = Y_1 x_1 - X_1 y_1,\quad \cdots Z_4 = Y_4 x_4 - X_4 y_4.$$

Nun bilden wir die linearen Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y = \mathfrak{Z}, \\ (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1)y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1, \\ (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_2)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_2)y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_2, \\ (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_3)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_3)y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_3, \\ (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_4)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_4)y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_4, \end{cases}$$

dann lassen sich $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_4$ derart bestimmen, daß dies die Gleichungen der Seileckseiten $s_0, s_1, \ldots s_4$ werden. Die Gleichungen (8) lassen sich nämlich schreiben

$$\mathfrak{Y}x_4 - \mathfrak{X}y_4 = \mathfrak{Y}x_0 - \mathfrak{X}y_0,$$
$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1)x_0 - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1)y_0 = (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1)x_1 - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1)y_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_4)x_3 - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_4)y_3 = (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_4)x_4 - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_4)y_4.$$

Nehmen wir sonach die durch die beiden Seiten dieser Gleichungen gegebenen Werte für $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_3$, $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_4$, so liegen die Punkte A_4, A_0 auf der durch die erste Gleichung (11) dargestellten geraden Linie, A_0, A_1 auf der durch die zweite Gleichung gegebenen usf., wie es sein sollte. Unter Voraussetzung der angegebenen Werte von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1$ usw. wird aber

$$\mathfrak{Y}_1 x_0 - \mathfrak{X}_1 y_0 = \mathfrak{Z}_1,$$
$$(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1)x_1 - (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)y_1 = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1,$$
$$(\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{Y}_2)x_2 - (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2)y_2 = \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{Z}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder, wenn wir die gefundenen Werte von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1$ usw. berücksichtigen,

$$Y_0 x_0 - X_0 y_0 = \mathfrak{Z}_1, \quad Y_1 x_1 - X_1 y_1 = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1,$$
$$Y_2 x_2 - X_2 y_2 = \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{Z}_2, \ldots$$

oder kürzer geschrieben

$$Z_0 = \mathfrak{Z}_1, \quad Z_1 = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1, \quad Z_2 = \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{Z}_2, \ldots,$$

woraus sich ergibt

$$(10a)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = Z_0, \\ \mathfrak{Z}_2 = Z_0 + Z_1, \\ \mathfrak{Z}_3 = Z_0 + Z_1 + Z_2, \\ \mathfrak{Z}_4 = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{cases}$$

Addiert man die Gleichungen (8) alle zueinander, so erhält man, da sich die Glieder mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ herausheben,

$$\mathfrak{Y}_1 x_0 - \mathfrak{X}_1 y_0 + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1) x_1 - (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) y_1 + \cdots = 0$$

oder

$$Y_0 x_0 - X_0 y_0 + Y_1 x_1 - X_1 y_1 + \cdots = 0,$$

d. h.

(9a) $$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0.$$

Es handelt sich nun darum, die hier eingeführten Größen Z_0, Z_1 usw. auch geometrisch zu interpretieren. Nennen wir φ_i den Winkel, um den die Kraft P_i mit den Komponenten X_i, Y_i gegen die positive x-Achse geneigt ist, nennen wir ferner α_i den Winkel, den der Radiusvektor aus dem Koordinatenursprung C_0 nach dem Angriffspunkt $A_i(x_i, y_i)$ dieser Kraft P_i mit der positiven x-Achse einschließt und r_i seine Länge, so wird (vgl. Fig. 17)

$$X_i = P_i \cos \varphi_i, \quad Y_i = P_i \sin \varphi_i, \quad x_i = r_i \cos \alpha_i, \quad y_i = r_i \sin \alpha_i$$

und somit

$$Z_i = Y_i x_i - X_i y_i = P_i r_i [\sin \varphi_i \cos \alpha_i - \cos \varphi_i \sin \alpha_i]$$
$$= P_i r_i \sin (\varphi_i - \alpha_i).$$

Der Wert von Z_i wird also gegeben durch den doppelten Inhalt des Dreiecks, von dem der Radiusvektor r_i und die Kraft P_i zwei Seiten bilden, und diese Strecken schließen in der Tat den Winkel $\varphi_i - \alpha_i$ ein. Der Winkel $\varphi_i - \alpha_i$ und damit der Ausdruck Z_i bekommt das positive Vorzeichen, wenn die Kraft P_i auf die entgegengesetzte Seite von der Geraden des Radiusvektor fällt wie die positive x-Achse, oder, wie man sich die Sache auch vorstellen kann, wenn die Kraft den Radiusvektor, an dessen Endpunkte A_i sie angreift, in positivem Sinne (d. h. in dem Sinne eines wachsenden α_i) zu drehen strebt, im entgegengesetzten Falle hat Z_i das Vorzeichen Minus. Sein absoluter Wert wird nach der angeführten Bedeutung auch angegeben durch das Produkt der Kraft P_i mit dem Abstande h_i der Linie, in der sie wirkt, von dem Koordinatenursprung C_0. Gemäß dieser Bedeutung heißt Z_i, mit dem richtigen Vorzeichen genommen, das statische Moment der Kraft P_i für den Punkt C_0. Will man das statische Moment derselben Kraft für irgendeinen anderen Punkt A mit den Koordinaten x, y finden, so hat man nur die Koordinatenachsen derart parallel zu verschieben, daß der Ursprung nach A fällt. Dann werden in diesem

neuen Koordinatensystem die Koordinaten des Punktes A_i gleich $x_i - x$, $y_i - y$, und demgemäß findet man für das gesuchte Moment den Wert

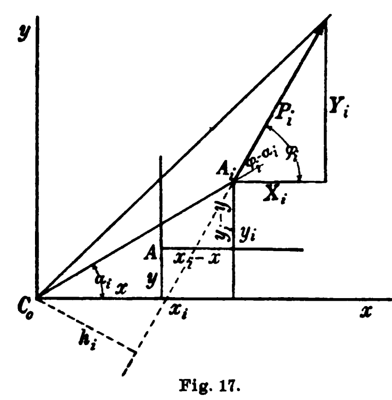


Fig. 17.

$$\mathfrak{M}_i(A) = Y_i(x_i - x) - X_i(y_i - y)$$

oder

$$\mathfrak{M}_i(A) = Z_i - Y_i x + X_i y.$$

Die Größen X_i, Y_i, Z_i, die so das Moment für jeden Punkt der Ebene bestimmen, wollen wir künftig als die **Koordinaten** der Kraft bezeichnen.

Wir definieren nun als das statische Moment eines Kräftesystems für einen Punkt A die algebraische Summe der statischen Momente aller seiner Einzelkräfte für denselben Punkt A. Dann zeigt sich, daß dieses Moment dargestellt wird durch den Ausdruck

$$\mathfrak{M}(A) = \sum Z_i - \sum Y_i \cdot x + \sum X_i \cdot y,$$

die Summe über alle Kräfte des Systems erstreckt.

Wir fanden aber für unser Kräftesystem

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0,$$

und somit ergibt sich

$$\mathfrak{M}(A) = 0$$

für jeden Punkt A der Ebene, d. h. **wenn für ein ebenes Kräftesystem sowohl das Kräftepolygon wie das Seileck sich schließt, so verschwindet sein statisches Moment für jeden Punkt der Ebene.**

Es gilt aber auch das Umgekehrte. In der Tat ergibt sich, wenn für irgend drei Punkte der Ebene (x, y), (x', y'), (x'', y''), die nicht **einer** geraden Linie angehören, das statische Moment verschwindet,

$$\sum Z_i - \sum Y_i \cdot x + \sum X_i \cdot y = 0,$$

$$\sum Z_i - \sum Y_i \cdot x' + \sum X_i \cdot y' = 0,$$

$$\sum Z_i - \sum Y_i \cdot x'' + \sum X_i \cdot y'' = 0,$$

d. h. $\sum Z_i, -\sum Y_i, \sum X_i$ müssen, wenn sie nicht alle verschwinden, die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in einer linearen Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 y = 0$$

sein, der die Koordinaten aller drei Punkte genügen. Da diese aber nicht auf einer geraden Linie liegen sollen, können ihre Koordinaten auch nicht derselben linearen Gleichung genügen, es muß also

$$\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0, \sum Z_i = 0$$

werden. Die ersten beiden Gleichungen drücken aus, daß das Kräftepolygon sich schließt; ist auch die dritte erfüllt, so schließt sich ebenfalls das Seileck. Fügen wir nämlich den bereits gefundenen Gleichungen der Seileckseiten als die letzte hinzu

$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_5)\, x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_5)\, y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_5,$$

indem wir setzen

$$\mathfrak{X}_5 = \sum_{i=0}^{4} X_i, \quad \mathfrak{Y}_5 = \sum_{i=0}^{4} Y_i, \quad \mathfrak{Z}_5 = \sum_{i=0}^{4} Z_i,$$

so wird in der Tat für $\mathfrak{X}_5 = 0$, $\mathfrak{Y}_5 = 0$, $\mathfrak{Z}_5 = 0$ diese Gleichung identisch mit der ersten der Gleichungen (11), und damit fallen auch die durch die Gleichungen dargestellten Seileckseiten zusammen.

Aus dem Gefundenen folgt sofort, daß das statische Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zusammengenommen entgegengesetzt gleich ist dem statischen Moment der Kraft P_0, und direkt gleich dem Moment derselben Kraft mit umgekehrter Richtung. Diese letztere Kraft, die wir R nennen wollen, aber ist die Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4. Ziehen wir durch A eine Parallele zu der Kraft R und nennen h den Abstand des Angriffspunktes S dieser Kraft von der gezogenen Parallele (s. Fig. 18), so ist das in Rede stehende Moment $= R \cdot h$. Die Linien der Seileckseiten s_0 und s_4 begrenzen aber mit der Parallelen zusammen ein Dreieck, das dem Dreieck $C_0\, O\, C_4$ ähnlich ist. Nennen wir in diesem Dreieck H die auf der Seite $C_0\, C_4$ oder R errichtete Höhe und bezeichnen in dem anderen Dreiecke die Länge der Seite, die auf die zu P_0 gezogene Parallele fällt, mit g, so wird $R : H = g : h$, und somit das Moment $R \cdot h = H \cdot g$.

Liegt also ein beliebiges Kräftesystem vor und konstruieren wir dafür das durch die Resultante R zum Abschluß gebrachte Kräfte-

polygon und das ebenfalls ungeschlossene Seileck für einen Kräftepol O, so wird das statische Moment des Kräftesystems für einen Punkt A gefunden, indem man das auf der Parallelen durch A zu R von der ersten und der letzten Seileckseite ausgeschnittene Stück g mit dem Abstande H des Pols O von der Resultanten R im Kräfteplan multipliziert.

Man beachte, daß in den Gleichungen der Seileckseiten die Koordinaten x_i, y_i der Eckpunkte A_i nur in den Verbindungen

$$Y_i x_i - X_i y_i = Z_i$$

vorkommen. Das bedeutet aber für die Koordinaten x_i, y_i eine lineare Gleichung, d. h. die Gleichung einer geraden Linie, auf der der Angriffspunkt A_i liegen soll. In dieser Linie wirkt die Kraft P_i. Diese dachten wir uns nämlich im Punkte A_i angreifend, und auch ihre Richtung fällt mit der der gefundenen Linie zusammen; denn sind x'_i, y'_i die Koordinaten irgendeines weiteren Punktes auf dieser Linie, so wird auch

$$Y_i x'_i - X_i y'_i = Z_i,$$

und durch Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich sofort

$$(x'_i - x_i):(y'_i - y_i) = X_i : Y_i,$$

worin die analytische Begründung der Behauptung liegt.

Geben wir die Größe und Richtung der Kräfte und außerdem ihre Wirkungslinien a_1, a_2, a_3, a_4, so sind die Größen X_i, Y_i, Z_i festgelegt und umgekehrt. Wir wollen nun fragen, welcher Spielraum dann noch für das Seileck bleibt, dessen Endpunkte auf den Wirkungslinien der einzelnen Kräfte liegen, und für das diese Kräfte ein System äußerer Kräfte darstellen, d. h. durch die Spannungen in den Seileckseiten im Gleichgewicht gehalten werden. Wir können leicht zeigen, daß von dem Seileck die ersten beiden Seiten bis auf die Bedingung, daß sie sich auf der Wirkungslinie der ersten Kraft schneiden müssen, willkürlich bleiben, daß dadurch aber das ganze Seileck eindeutig bestimmt ist. Hierbei ist nur vorausgesetzt, daß im Kräfteplan der Kräftepol mit keiner der Kräfte in einer geraden Linie liegt.

In der Tat wird zunächst durch die Richtungen der beiden ersten Seileckseiten die Lage des Kräftepols O bestimmt, indem wir zu ihnen durch C_0 und C_1 im Kräfteplan die Parallelen ziehen; diese schneiden sich in O. Ist aber der Kräftepol und damit die

Richtung jeder Seileckseite gegeben, so können wir noch einen Punkt beliebig annehmen, durch den die erste Seileckseite gehen soll, damit ist dann das ganze Seileck völlig festgelegt.

Zwei Seilecke, die zu demselben Kräftesystem und demselben Kräfteplan gehören, deren korrespodierende Seiten also parallel sind, wollen wir äquivalent nennen.

Wir können noch fragen, wie sich ein Seileck ändert, wenn im Kräfteplan der Kräftepol verschoben wird. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Gleichungen der Seileckseiten noch einmal hinschreiben für veränderte Werte $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Greifen wir dann die Gleichungen zweier korrespondierenden Seileckseiten heraus, etwa

$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_2)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_2)y = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_2,$$
$$(\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}_2)x - (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_2)y = \mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}_2,$$

so ergibt sich aus ihnen durch Subtraktion sofort

$$(\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y})x - (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})y = \mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}.$$

Diese Gleichung ist aber unabhängig davon, welches Paar korrespondierender Seileckseiten wir herausgreifen. Sie ist erfüllt für die Koordinaten aller der Punkte, welche die Gleichungen zweier kor-

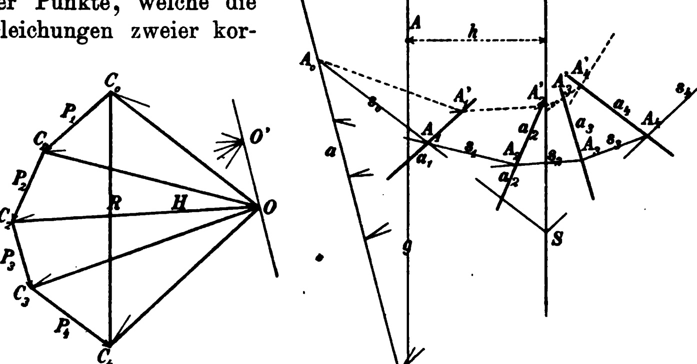


Fig. 18.

respondierenden Seileckseiten befriedigen, d. h. die Schnittpunkte dieser Seiten bilden, und somit finden wir die Gleichung einer bestimmten geraden Linie a, auf der sich alle Paare korrespondierender Seileckseiten schneiden. Diese Gerade

ist außerdem der Verbindungslinie der beiden Kräftepole, des alten und des neuen, parallel. Denn bilden wir ihre Gleichung für die Koordinaten x', y' irgendeines weiteren auf ihr gelegenen Punktes:

$$(\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y})\,x' - (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})\,y' = \mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z},$$

so folgt durch Subtraktion der vorhergehenden von dieser Gleichung sofort

$$(\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y})(x' - x) - (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})(y' - y) = 0$$

oder

$$(x' - x) : (y' - y) = (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}) : (\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}),$$

worin die Begründung der Behauptung liegt.

Zwei Seilecke, die in dieser Beziehung stehen, heißen homolog, und die Gerade a, auf der sich die Paare ihrer entsprechenden Seiten schneiden, heißt ihre Homologieachse. Mit Hilfe dieser Achse kann das homologe Seileck unmittelbar konstruiert werden, und jedes Seileck, das wir so, bei beliebiger Wahl der Homologieachse und der neuen Richtung der ersten Seileckseite, finden, ist ein Seileck für dasselbe Kräftesystem wie das erste (wenn wir uns von jeder Kraft Wirkungslinie, Größe und Sinn gegeben denken). Umgekehrt sind, wie aus dem Gesagten sofort hervorgeht, zwei Seilecke immer homolog, wenn sie zu demselben Kräftesystem gehören und nicht äquivalent sind.

Mit dem, was wir bis jetzt gesagt haben, ist der geometrische Gehalt der die Seileckseiten festlegenden Gleichungen noch nicht erschöpft. Um aber ihre volle Ausdeutung zu gewinnen, müssen wir aus der Ebene in den Raum gehen und zu geometrischen Betrachtungen greifen, die, ehe wir weitergehen, kurz im Zusammenhange dargestellt werden mögen. Hierbei müssen wir uns jedoch auf das, was für uns nötig ist, beschränken und für alles weitere auf die Lehrbücher der neueren Geometrie verweisen.

Drittes Kapitel.

Das Nullsystem.

Wir knüpfen an die analytische Darstellung einer Ebene im Raume an, die wir in einer besonderen, für unsere Zwecke bequemen Form geben wollen. Wir denken uns ein rechtwinkliges

Koordinatensystem im Raume, C_0 sei sein Ursprung, x, y, z seien die Koordinaten selbst. Wir nehmen nun eine Ebene π, welche die z-Achse in einem Punkte Z_0 schneidet und mit dieser Achse den Winkel φ bildet. Ist derselbe von 90^0 verschieden, so gibt es eine einzige horizontale (d. h. zur z-Achse senkrechte) gerade Linie p, die durch Z_0 geht und in π liegt. Auf diese Linie p fällen wir aus einem beliebigen Punkte P der Ebene π das Lot PQ, und weiter aus P und Q die Lote PP' und QQ' auf die xy-Ebene. Fällen wir endlich noch aus Q das Lot QP_1 auf PP', so wird der Winkel QPP_1 gleich dem Winkel φ und somit

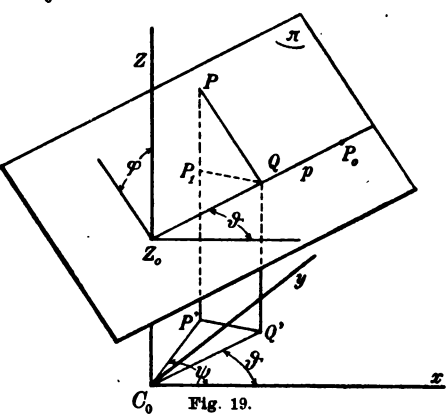


Fig. 19.

$$P_1 P = P_1 Q \cdot \operatorname{cotg} \varphi = P' Q' \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

Setzen wir aber die Ordinaten $P'P = z$, $Q'Q = z_0$, so wird

$$P_1 P = z - z_0.$$

Ferner sei ψ der Winkel, den der Radiusvektor $C_0 P'$ mit der positiven x-Achse bildet, ϑ der analoge Winkel für den Radiusvektor $C_0 Q'$, so wird, da $P'Q'$ auf $C_0 Q'$ senkrecht steht,

$$\begin{aligned} P'Q' &= C_0 P' \cdot \sin(\psi - \vartheta) \\ &= C_0 P' \sin\psi \cdot \cos\vartheta - C_0 P' \cos\psi \cdot \sin\vartheta \\ &= y \cdot \cos\vartheta - x \cdot \sin\vartheta, \end{aligned}$$

wenn wir mit $x = C_0 P' \cos\psi$, $y = C_0 P' \sin\psi$ die Koordinaten des Punktes P' in der xy-Ebene bezeichnen. Somit verwandelt sich die erste Gleichung in

$$z - z_0 = \operatorname{cotg} \varphi\, (y \cos\vartheta - x \sin\vartheta).$$

Dieser Gleichung wollen wir die Form geben

(1) $$k(z - z_0) = x_0 y - y_0 x,$$

indem wir

(2) $$x_0 = k \operatorname{cotg} \varphi \cdot \cos \vartheta,\ y_0 = k \operatorname{cotg} \varphi \cdot \sin \vartheta$$

setzen. Der Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 ist ein Punkt der Linie p, und sein Abstand $P_0 Z_0$ von Z_0, d. h. von der z-Achse, hat den Wert

(3) $$r = k \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

Dieser Punkt P_0 bestimmt die Lage der Ebene im Raume, die ursprünglich durch die Größen z_0, ϑ, φ festgelegt war. Es ist gut, noch einmal an die Bedeutung dieser Größen zu erinnern. z_0 ist die Ordinate des Punktes Z_0, in dem die Ebene π die z-Achse schneidet, ϑ ist der Winkel, den die horizontalen Geraden der Ebene π mit der xz-Ebene einschließen, also auch der Winkel, den die Spur der Ebene π in der xy-Ebene mit der x-Achse bildet, φ endlich ist der Winkel, den die Ebene mit der z-Achse bildet, $90^0 - \varphi$ also der Winkel, um den die Ebene gegen die xy-Ebene, die wir als horizontal ansehen, geneigt ist.

Wir wollen auch auf die Bestimmung der Vorzeichen achten. Der Winkel φ kann nach zwei Seiten gerechnet werden, die durch das Vorzeichen zu unterscheiden sind. Entsprechend kann auch der Abstand r nach zwei Seiten gerechnet werden, die wieder durch das Vorzeichen geschieden werden müssen. Der Zusammenhang zwischen beiden Vorzeichenbestimmungen ist durch (3) gegeben: mit φ wird auch r positiv oder negativ, wenn wir, was wir dürfen, φ in die Grenzen -90^0 und $+90^0$ einschließen. Was die geometrische Deutung dieses Zusammenhanges betrifft, so ist leicht zu sehen, daß bei positivem k für einen in die Richtung $Z_0 Z$ gestellten Beobachter, der nach P_0 hinsieht, der aufsteigende Teil der Ebene π nach links hin liegen muß. In der Tat wird für einen Punkt dieses Teils der Ebene $z - z_0 > 0$, mithin nach (1)

$$x_0 y - y_0 x > 0 \text{ oder } r \sin(\psi - \vartheta) > 0,$$

d. h. wenn $r > 0$, $\psi > \vartheta$ und wenn $r < 0$, $\psi < \vartheta$: der Punkt P_1 liegt, wenn, wie wir es annehmen wollen, der positive Drehsinn in der xy-Ebene, der von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse führt, links herum geht, links oder rechts von dem Strahl CQ, je nachdem P_0 auf derselben oder der entgegengesetzten Seite wie Q liegt, was mit der früheren Festsetzung gleichbedeutend ist.

In der Form (1) wollen wir von nun an die Gleichung einer Ebene π im Raume annehmen. Der Faktor k auf der linken Seite

bleibt willkürlich wählbar. Er bringt die linke und die rechte Seite der Gleichung auf dieselbe Dimension, wenn wir ihm selbst die Dimension einer Länge geben. Später werden wir für k einfach die Längeneinheit wählen.

Für den Punkt P_0 der Ebene π, der deren Lage im Raume bestimmt, gebrauchen wir die von Möbius in seinem Lehrbuch der Statik (1835, Werke Bd. 3) eingeführte Bezeichnung, indem wir ihn den Nullpunkt der Ebene nennen. Umgekehrt heißt die Ebene selbst die Nullebene des sie festlegenden Punktes P_0. Diese Zuordnung von Punkten und Ebenen im Raume bezeichnet Möbius als ein Nullsystem, und die z-Achse unseres Koordinatensystems ist die Achse des Nullsystems. Sie soll künftig immer durch den Buchstaben z charakterisiert werden.

Die Beziehung des Nullsystems zu seiner Achse läßt sich geometrisch folgendermaßen charakterisieren: Um zu einem Punkte P_0 die zugehörige Ebene π zu finden, fälle man aus P_0 auf die Achse das Lot $P_0 Z_0$, dessen Länge r sei, und lege durch dieses Lot die Ebene, die mit der Achse den durch die Gleichung

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{r}{k} \tag{4}$$

festgelegten Winkel φ bildet, wobei wir die oben gegebene Regel für die Bestimmung der Seite, nach der hin dieser Winkel genommen werden muß, zu beachten haben.

Liegt der Punkt P_0 auf der Achse selbst, so wird die zugehörige Nullebene die Normalebene der Achse in diesem Punkte.

Nur für die Ebenen, die der Achse parallel sind, versagt die Auffindung des Nullpunktes. Sie sind also singuläre Ebenen des Nullsystems. Man kann sie auch so charakterisieren, daß man sagt, der Nullpunkt rücke für sie in unendliche Entfernung, und zwar in einer bestimmten Richtung, so daß ihnen nicht mehr ein Punkt, sondern eine Richtung zuzuweisen ist. Um dies zu erkennen, setzen wir in der Gleichung (1)

$$x_0 = \varrho \cdot \xi, \quad y_0 = \varrho \cdot \eta, \quad z_0 = \varrho \cdot \zeta,$$

und dividieren sie durch ϱ. Lassen wir dann ϱ über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich

$$k\zeta = \eta x - \xi y. \tag{5}$$

Dies ist sonach die Gleichung der Nullebene, wenn der Nullpunkt

sich nach der durch die Proportion

$$x_0 : y_0 : z_0 = \xi : \eta : \zeta$$

bestimmten Richtung ins Unendliche entfernt. Diese Richtung ist in der Ebene selbst enthalten. In der Tat muß der Nullpunkt, auch wenn er in unendliche Entfernung rückt, in seiner Nullebene bleiben, d. h. sich in einer Richtung entfernen, die der Ebene selbst angehört. Bezeichnen wir mit d den Abstand der Achse von der zu ihr parallelen Ebene, so wird dieses d die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck, von dem die durch die Ebene auf der x- und y-Achse abgeschnittenen Stücke m, n die Katheten bilden, und sonach ist

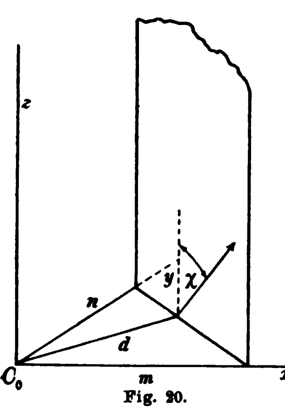


Fig. 20.

$$d = \pm \frac{m \cdot n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Es folgt aber aus der Ebenengleichung, indem wir in ihr zuerst $y = 0$ und dann $x = 0$ machen,

$$m = \frac{k\zeta}{\eta}, \quad n = -\frac{k\zeta}{\xi},$$

und damit ergibt sich

$$d = \frac{k\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

oder

(6) $$d = k \cdot \operatorname{cotg} \chi,$$

wenn wir mit χ den Winkel bezeichnen, den die der Ebene zugeordnete Richtung mit der z-Achse bildet. Diese Richtung kann ihrerseits beliebig gewählt werden, nur die Richtung der z-Achse selbst ist auszuschließen. Denn für $\chi = 0$ wird $d = \infty$, d. h. die ganze zugehörige Ebene rückt ins Unendliche. In allen anderen Fällen ergibt sich eine bestimmte Durchmesserebene, d. h. der Achse parallele Ebene, die der gegebenen Richtung zugeordnet ist.

Man beachte ferner, daß die Gleichung (1) sich nicht ändert, wenn man z, z_0 durch $z + \delta$, $z_0 + \delta$ ersetzt, was auch der Wert von δ sei. Daraus folgt aber, daß, wenn man den Nullpunkt auf einer Parallelen zur Achse, einem Durchmesser des Nullsystems,

verschiebt, die zugehörige Nullebene sich parallel verschiebt. Jedem Durchmesser ist so eine bestimmte Ebenenstellung zugeordnet, genau analog wie jeder Durchmesserebene eine bestimmte Linienrichtung zugeordnet wird.

Die Gleichung (1) ändert sich außerdem nicht, wenn wir x, y, z mit x_0, y_0, z_0 vertauschen. Das bedeutet aber: Liegt ein Punkt P in der Nullebene eines anderen Punktes P_0, so liegt auch P_0 in der Nullebene von P. Die Beziehung zwischen zwei solchen Punkten, die durch die Gleichung (1) gegeben wird, ist also umkehrbar, und wir nennen zwei solche Punkte konjugierte Punkte des Nullsystems.

Wir wollen nun beweisen, daß den Punkten einer beliebigen Geraden g alle Punkte einer anderen Geraden g' konjugiert sind, oder mit anderen Worten, daß, wenn der Nullpunkt auf einer Geraden g fortrückt, seine Nullebene sich um eine andere Gerade g' dreht. Dann sind auch umgekehrt den Punkten von g' die Ebenen durch g als Nullebenen zugeordnet. Wir finden demnach zu einem Punkte auf einer der beiden Geraden die zugehörige Nullebene, indem wir diesen Punkt mit der anderen Geraden durch eine Ebene verbinden. Zwei so einander zugeordnete Gerade g, g' heißen reziproke Polaren des Nullsystems.

Wir wählen, um den Beweis zu führen, für g eine Gerade, die in P_0 auf der horizontalen Geraden Z_0P_0 senkrecht steht, worin, solange P_0 willkürlich bleibt, keine Spezialisierung liegt. Wir bezeichnen mit P_0' einen beliebigen Punkt von g, mit x_0', y_0', z_0' seine Koordinaten, ferner konstruieren wir das rechtwinklige Dreieck $P_0Q_0P_0'$, in dem Q_0P_0' vertikal, P_0Q_0 horizontal ist. Da ferner P_0Q_0 senkrecht zu Z_0P_0 ist, können wir den Winkel, den es mit der xz-Ebene einschließt, gleich $90^0 + \vartheta$ annehmen, wenn ϑ der Winkel ist, den Z_0P_0 mit der xz-Ebene bildet, und ist φ' der Winkel, den die Linie P_0P_0' mit der Richtung der z-Achse bildet, so wird $Q_0P_0' = P_0Q_0 \cdot \operatorname{cotg}\varphi'$. Somit werden die Projektionen von P_0P_0' auf die Koordinatenachsen $-q\sin\vartheta$, $q\cos\vartheta$, $q\operatorname{cotg}\varphi'$ und wir finden, wenn wir noch $P_0Q_0 = q$ setzen, für die Koordinaten des Punktes P_0' die Werte

$$x_0 - q\sin\vartheta, \quad y_0 + q\cos\vartheta, \quad z_0 + q\operatorname{cotg}\varphi';$$

wenn wir diese Werte in die Gleichung (1) einsetzen, so erhalten wir für die Nullebene von P_0' die Gleichung

$$k(z - z_0 - q\operatorname{cotg}\varphi') = (x_0 - q\sin\vartheta)y - (y_0 + q\cos\vartheta)x.$$

Diese Gleichung ist für jeden Wert von q, d. h. wie auch der Punkt P_0' auf g angenommen werde, befriedigt, wenn gleichzeitig

$$k(z - z_0) = x_0 y - y_0 x,$$
$$k \operatorname{cotg} \varphi' = \cos\vartheta \cdot x + \sin\vartheta \cdot y$$

wird. Die erste dieser Gleichungen ist wieder die Gleichung (1) der Ebene π, die zweite Gleichung ist die Gleichung einer zur z-Achse parallelen Ebene π', die mit der xz-Ebene den Winkel $90^0 + \vartheta$ einschließt, also zur Geraden $Z_0 P_0$ senkrecht ist und auf ihr das Stück

(7) $$r' = k \operatorname{cotg} \varphi'$$

abschneidet, wie sich sofort ergibt, wenn man in die Ebenengleichung einsetzt

$$x = r' \cos\vartheta, \quad y = r' \sin\vartheta.$$

Da die Ebene π aber durch die Gerade $Z_0 P_0$ hindurchgeht, steht die Schnittlinie g' der beiden Ebenen π und π' ebenfalls auf der Geraden $Z_0 P_0$ senkrecht und bildet mit der Achse z denselben Winkel φ wie die Ebene π. Die Gerade g' ist aber die gesuchte reziproke Polare, deren Punkte zu allen Punkten von g konjugiert sind und in der sich die Nullebenen aller Punkte von g schneiden. Wir finden daher, daß zwei reziproke Polaren des Nullsystems sich in folgender Weise geometrisch festlegen lassen: Sie treffen beide dasselbe Lot der Achse, und zwar sind die durch die Treffpunkte auf dem Lote abgeschnittenen Stücke r, r' mit den Winkeln φ', φ, die g, g' mit der Achsenrichtung einschließen, durch die aus (4) und (7) resultierende Relation verbunden

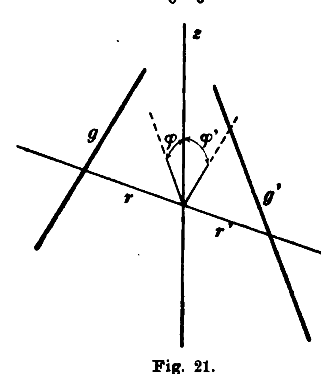


Fig. 21.

(8) $$r \operatorname{tang} \varphi = r' \operatorname{tang} \varphi' = k.$$

Hieraus folgt aber, daß, wenn wir $\varphi' = \varphi$ nehmen und die Gerade g der Bedingung

(9) $$r \operatorname{tang} \varphi = k$$

genügen lassen, die reziproke Gerade mit ihr zusammenfällt. Eine

solche Gerade hat also die Eigentümlichkeit, daß, wenn der Nullpunkt auf ihr fortrückt, die Nullebene sich um sie selbst dreht. Eine Gerade von dieser Eigenschaft bekommen wir immer, wenn wir durch einen Punkt in seiner Nullebene oder in einer Ebene durch ihren Nullpunkt eine gerade Linie beliebig ziehen. Denn nehmen wir auf dieser Linie zwei Punkte an, von denen der eine, P, beliebig ist, während der andere der Nullpunkt P_0 ist, durch den die Linie gezogen wurde, so geht nach der Voraussetzung die Nullebene des Punktes P_0 durch die Linie g hindurch, die Nullebene des Punktes P muß aber auch durch den Punkt P_0 gehen, da P in der Nullebene von P_0 liegt. Die reziproke Polare von g, in der sich die Nullebenen der Punkte von g schneiden, fällt also in der Tat mit g selbst zusammen. Eine Gerade von dieser Eigenschaft heißt nach Möbius eine Nullinie des Nullsystems.

Es ist auch sofort zu sehen, daß jede Gerade, die zwei reziproke Polaren des Nullsystems trifft, eine Nullinie ist. Denn verbinden wir sie mit einer dieser beiden Polaren durch eine Ebene, so geht sie durch den Nullpunkt dieser Ebene, nämlich ihren Schnittpunkt mit der anderen Polaren, hindurch, ist also eine Nullinie. Zu den Nullinien gehören insbesondere alle Geraden, welche die Achse des Nullsystems unter rechtem Winkel treffen.

Wir wollen noch bemerken, daß nach den angegebenen Konstruktionsregeln das Nullsystem ungeändert bleibt, wenn man den ganzen Raum einer Drehung um die Achse des Nullsystems oder einer Parallelverschiebung in der Richtung dieser Achse unterwirft. Ein Punkt und eine Ebene, die einander als Nullpunkt und Nullebene zugeordnet sind, bleiben auch nach einer solchen Bewegung in der gleichen Weise miteinander verbunden. Eine Nullinie geht wieder in eine Nullinie über, und zwei reziproke Polaren bleiben auch nach der Verrückung zwei reziproke Polaren desselben Nullsystems.

Das Nullsystem zeigt eine große Ähnlichkeit mit dem Polarsystem einer Fläche zweiter Ordnung. Auch hier wird jedem Punkte eine Ebene zugewiesen und umgekehrt, und ist einem Punkte P eine Ebene π zugeordnet, so ist jedem Punkte von π eine Ebene zugeordnet, die durch P hindurchgeht. Aber beim Polarsystem liegen nur die Punkte der sog. Ordnungsfläche auf ihren Polarebenen, welche dann die Ordnungsfläche in dem zugehörigen Punkte berühren, während bei dem Nullsystem jeder Punkt in der ihm zugeordneten Ebene liegt.

Auch in der analytischen Darstellung zeigt das Polarsystem eine große Ähnlichkeit mit dem Nullsystem. Wählen wir insbesondere für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung die folgende

(10) $$kz = xy,$$

also für die Fläche selbst ein gleichseitig hyperbolisches Paraboloid, das durch die x- und y-Achse des Koordinatensystems hindurchgeht und dessen Achse in die z-Achse fällt, so ergibt sich für die Polarebene eines Punktes (x_0, y_0, z_0) die Gleichung

(10a) $$k(z + z_0) = x_0 y + y_0 x.$$

Ist die Flächengleichung dagegen

(11) $$2kz = x^2 + y^2,$$

die Fläche also ein Rotationsparaboloid, so lautet die Gleichung der Polarebene

(11a) $$k(z + z_0) = x_0 x + y_0 y.$$

Es ist aber auch leicht, diese beiden Polarsysteme aus dem Nullsystem direkt herzuleiten, indem man allein die Nullpunkte und nicht gleichzeitig auch die Nullebenen eine Bewegung ausführen läßt. Ersetzt man nämlich in der Grundgleichung (1) z_0 durch $-z_0$, y_0 durch $-y_0$, so geht sie in (10a) über. Diese Veränderung der Koordinaten bedeutet aber, daß man die Nullpunkte eine halbe Umdrehung um die x-Achse, also um eine die Achse z des Nullsystems senkrecht treffende Linie ausführen läßt, es ergibt sich demnach: Dreht man die Nullpunkte aus ihren Nullebenen durch eine halbe Umdrehung um eine die Achse des Nullsystems senkrecht treffende Linie heraus, so geht die durch das Nullsystem gegebene Zuordnung zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes in die des Polarsystems eines hyperbolischen Paraboloids über, das die Drehachse selbst enthält und dessen Achse mit der Achse des Nullsystems zusammenfällt.

Dieses Paraboloid ist mit Nullinien des Nullsystems vollständig überdeckt. Es sind dies die Nullinien, welche die Drehachse (d. h. die x-Achse) unter rechten Winkeln schneiden und durch die Gleichungen

$$x = r, \quad \frac{z}{y} = \frac{r}{k},$$

wobei r willkürlich bleibt, bestimmt sind. Eliminiert man aus diesen Gleichungen r, so erhält man in der Tat die Gleichung (10) des Paraboloids.

Die Nullinien bilden auf dem Paraboloid die eine der auf ihm enthaltenen zwei Regelscharen, die andere Regelschar, deren Strahlen alle Strahlen der ersten Regelschar schneiden, besteht aus Paaren reziproker Polaren des Nullsystems, die symmetrisch zu dessen Achse z liegen und die y-Achse unter rechten Winkeln treffen. Für zwei solche reziproke Polaren ergeben sich, da, wenn $r' = -r$, $\varphi' = -\varphi$ wird, aus (8) für die Geraden g und g'

$$r \operatorname{tang} \varphi' = -k \quad \text{und} \quad r' \operatorname{tang} \varphi = -k$$

folgt, die Gleichungenpaare

$$y = r, \quad \frac{z}{x} = -\operatorname{cotg} \varphi' = \frac{r}{k}$$

und

$$y = -r', \quad \frac{z}{x} = -\operatorname{cotg} \varphi = -\frac{r'}{k};$$

durch Elimination von r resp. r' erhält man wieder die Gleichung des Paraboloids.

Auch das zweite der erwähnten Polarsysteme kann man aus dem Nullsystem herleiten, indem man jetzt

$$z_0 \text{ durch } -z_0, \quad x_0 \text{ durch } y_0, \quad y_0 \text{ durch } -x_0$$

ersetzt. Dies bedeutet aber geometrisch, daß man erstens die Nullpunkte an der xy-Ebene, also einer zur Achse z des Nullsystems senkrechten Ebene, spiegelt und sie zweitens um diese Achse durch 90^0 dreht. So finden wir: Spiegelt man die Nullpunkte an einer zur Achse des Nullsystems senkrechten Ebene und läßt sie außerdem eine Viertelumdrehung um diese Achse ausführen, so geht die Zuordnung des Nullsystems in die des Polarsystems eines Rotationsparaboloides über, dessen Rotationsachse mit der Achse des Nullsystems zusammenfällt.

Um nun die Bedeutung des Nullsystems für unsere statischen Aufgaben darzulegen, knüpfen wir nach dem Vorgange von F. Klein an den früher gefundenen Ausdruck für das statische Moment $z = \mathfrak{M}(A)$ einer einzelnen Kraft an. Dieser Ausdruck lautete

$$z = Z - Yx + Xy,$$

wenn x, y die Koordinaten des Bezugspunktes A und X, Y, Z die Koordinaten der Kraft sind. Geben wir der vorstehenden Gleichung die Form

$$z - Z = Xy - Yx, \tag{12}$$

so stimmt sie mit der Grundgleichung (1) überein, wenn wir darin $k = 1$ machen und X, Y, Z für x_0, y_0, z_0 schreiben.

Damit ist die folgende geometrische Deutung nahegelegt: Wir errichten in dem Bezugspunkte A auf der xy-Ebene ein Lot, dessen Länge z den Wert des Momentes angibt, und zwar auch dem Vorzeichen nach, indem wir positive Werte nach oben, negative nach unten abtragen. Die Endpunkte erfüllen dann eine Ebene σ, die Momentenebene, die durch die Gleichung (12) dargestellt wird. Wir ordnen ferner der Kraft einen Punkt $\mathfrak{C}$ im Raume derart zu, daß die Projektion des Radiusvektors, der vom Koordinatenursprung C_0 nach diesem Bildpunkte $\mathfrak{C}$ hinführt, die Kraft der Größe und Richtung nach angibt, d. h. daß die zwei ersten Koordinaten von $\mathfrak{C}$ die Kraftkomponenten X, Y werden, und daß die Ordinate Z von $\mathfrak{C}$ das Moment der Kraft für den Koordinatenursprung angibt. Dann liegt der Bildpunkt $\mathfrak{C}$ der Kraft in der Momentenebene σ und ist dieser Ebene in einem Nullsystem als Nullpunkt zugeordnet. Die Achse des Nullsystems ist die z-Achse, und sein Parameter k ist gleich 1, d. h. die früher gegebene Beziehung zwischen dem Abstand r des Nullpunktes von der Achse und der Neigung φ der Nullebene gegen die Achse ist hier die folgende

$$r = \operatorname{cotg} \varphi. \tag{13}$$

Die Wirkungslinie der Kraft ist die Schnittlinie der Momentenebene mit der xy-Ebene, und ihre Gleichung lautet

$$Z = Yx - Xy. \tag{14}$$

Sie ist der Projektion des Radiusvektors $C_0\mathfrak{C}$ auf die xy-Ebene, da sie ja die Richtung der Kraft hat, parallel. Ferner wird die Ordinate der Momentenebene im Koordinatenursprung gleich dem Abstande des Bildpunktes $\mathfrak{C}$ von der xy-Ebene. Die Neigung $\theta = 90^0 - \varphi$ der Momentenebene gegen die xy-Ebene ist durch die Gleichung gegeben

$$\operatorname{tang} \theta = r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{15}$$

ihr Tangens ist also gleich der Größe R der Kraft.

Nehmen wir nun zwei Kräfte an, die durch die Bildpunkte $\mathfrak{C}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ und $\mathfrak{C}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ gegeben seien. Dann werden die Gleichungen der zugehörigen Momentenebenen

$$z - Z_1 = X_1 y - Y_1 x,$$
$$z - Z_2 = X_2 y - Y_2 x.$$

Suchen wir aber das Moment der beiden Kräfte zusammengenommen, so ergibt sich hierfür nach der Definition dieses Momentes die Summe der Momente für die Einzelkräfte, also der Wert

$$z = (Z_1 + Z_2) - (Y_1 + Y_2)x + (X_1 + X_2)y.$$

Dies ist, wenn wir x, y, z wieder als Punktkoordinaten im Raume deuten, ebenfalls die Gleichung einer Ebene, die wir schreiben können

$$z - (Z_1 + Z_2) = (X_1 + X_2)y - (Y_1 + Y_2)x.$$

Zufolge dieser Gleichung läßt sich das resultierende Moment wieder deuten als das Moment einer Einzelkraft, welche die Resultante der beiden gegebenen Kräfte bildet, vorausgesetzt, daß die neu gefundene Momentenebene die xy-Ebene oder Grundebene schneidet, ihr also nicht parallel ist. Das letztere würde eintreten, wenn gleichzeitig

$$X_1 + X_2 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0$$

würde. Denn dann reduziert sich die Gleichung der Momentenebene auf

$$z = Z_1 + Z_2,$$

und das Moment ist konstant für alle Punkte der Ebene. Dieser Fall wird uns später noch weiter beschäftigen. In allen anderen Fällen liefert die Schnittlinie der gefundenen Momentenebene mit der xy-Ebene die Wirkungslinie der resultierenden Kraft und der Tangens ihrer Neigung gegen die xy-Ebene die Größe dieser Kraft.

Man erkennt sofort, daß das gewonnene Resultat sich auf eine beliebige Anzahl von Kräften übertragen läßt. Sind

$$(16) \qquad z - Z_i = X_i y - Y_i x \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

die Gleichungen für die Momentenebenen der Einzelkräfte, so wird die Gleichung der resultierenden Momentenebene

$$(17) \qquad z - \sum Z_i = \sum X_i \cdot y - \sum Y_i \cdot x,$$

wobei die Summation über alle vorgelegten Kräfte zu erstrecken ist.

Es ergibt sich auch leicht die geometrische Konstruktion der resultierenden Momentenebene. Zunächst findet man für zwei Kräfte das folgende einfache Verfahren: Man errichte in den Linien, in denen die Momentenebenen der beiden Kräfte die Grundebene schneiden, auf der letzteren die Normalebenen und schneide diese jedesmal mit der Momentenebene der anderen Kraft. Die Verbindungsebene der so gefundenen beiden Schnittlinien ist die resultierende Momentenebene. Man erkennt sofort, daß dies Verfahren auch bei beliebig vielen Kräften zum Ziele führt, indem man zunächst die resultierende Momentenebene für die erste und zweite Kraft konstruiert und sie dann mit der Momentenebene der dritten Kraft vereinigt; so fährt man fort, bis man alle Kräfte herangezogen hat; die Reihenfolge, in der man die Kräfte nimmt, bleibt dabei völlig willkürlich.

Diese Ausführungen wollen wir nun für die Gleichungen (11) des vorigen Kapitels, welche die Seiten des Seilecks darstellen, verwerten. Wir führen zu dem Zwecke die Punkte ein mit den Koordinaten

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}),\ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1),\ (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2),\ (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Z}_3),\ (\mathfrak{X}_4, \mathfrak{Y}_4, \mathfrak{Z}_4),$$

die wir der Reihe nach mit $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ bezeichnen und die lotrecht über den Punkten O, C_1, C_2, C_3, C_4 des Kräfteplans liegen. Von diesen Punkten suchen wir in dem Nullsystem, auf das uns die Momentenebenen geführt haben, die Nullebenen $\omega, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, deren Gleichungen lauten

$$(18) \qquad \begin{cases} z - \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x, \\ z - \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X}_1 y - \mathfrak{Y}_1 x, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z - \mathfrak{Z}_4 = \mathfrak{X}_4 y - \mathfrak{Y}_4 x. \end{cases}$$

Wir nehmen noch die Ebene γ_0, für die

$$z = 0,$$

als Nullebene des Punktes C_0 hinzu und wollen die Ebene ω der Reihe nach zum Schnitt bringen mit den Ebenen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Wir finden durch einfache Subtraktion der zugehörigen Gleichungen jedesmal die Gleichung der Vertikalebene, die durch die Schnittlinie hindurchgeht:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y, \\ \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1)y, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_4 = (\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_4)x - (\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_4)y. \end{cases}$$

Dies aber sind die Gleichungen der Seileckseiten, und diese ergeben sich sonach als die Schnittlinien der Vertikalebenen mit der Grundebene, d. h. als senkrechte Projektionen der Schnittlinien (ω, γ_0), (ω, γ_1) usw. auf die Grundebene.

Die Wirkungslinie der Kraft P_2 z. B. hat nun die Gleichung

$$Z_2 = X_2 y - Y_2 x$$

oder

$$(20)\quad \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{Z}_2 = (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2)y - (\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{Y}_2)x.$$

Diese Gleichung entsteht aber durch Subtraktion der Gleichungen

$$z - \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{X}_2 y - \mathfrak{Y}_2 x, \quad z - \mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{X}_3 y - \mathfrak{Y}_3 x,$$

welche die Ebenen γ_2, γ_3 darstellen. Man findet also die Wirkungslinie der Kraft P_2 durch orthogonale Projektion der Schnittlinie von γ_2 und γ_3 auf die Grundebene und analog für die übrigen äußeren Kräfte. Auf diese Weise erkennen wir:

Konstruieren wir über dem Kräfteplan die zugehörige Raumfigur, die aus den Punkten $\mathfrak{C}_0 = C_0$ und $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{O}$ über C_1, C_2, C_3, C_4, O besteht, so ergibt sich das zugehörige Seileck, indem wir die Nullebene ω des Punktes $\mathfrak{O}$, der über dem Kräftepol O liegt, mit den Nullebenen γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 der Punkte $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ schneiden und die Schnittlinien auf die Grundebene senkrecht projizieren. Die Wirkungslinien der äußeren Kräfte selbst finden wir, indem wir die Schnittlinien je zweier aufeinanderfolgenden Nullebenen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ auf die Grundebene projizieren.

Zu beachten ist, daß mit dem Kräftesystem die Raumpunkte $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1, \ldots$, also auch die Nullebenen γ_0, $\gamma_1, \ldots$, fest gegeben sind, der Punkt $\mathfrak{O}$ aber, also auch die Ebene ω, völlig willkürlich bleibt. Die Projektionen der ebenen Polygone, welche die festen Ebenen aus der beweglichen Ebene ω ausschneiden, liefern dann alle die möglichen Seilecke.

Viertes Kapitel.

Besondere Aufgaben der Kräftevereinigung und Kräftezerlegung.

Wir wollen aus der im vorigen Kapitel gegebenen Raumkonstruktion zunächst den besonderen Fall herausgreifen, wo die Zahl der vorhandenen äußeren Kräfte 3 beträgt, wo also der Kräfteplan durch 4 Punkte C_0, C_1, C_2, O und ihre 6 Verbindungslinien, d. h. durch ein vollständiges ebenes Viereck gebildet wird. Die Raumfigur des Kräfteplans ist dann ein Tetraeder, sie besteht aus vier Punkten $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{O}$ in den Vertikalen von C_0, C_1, C_2, O und den 6 Verbindungslinien dieser Punkte, die in der Tat die Kanten eines Tetraeders sind.

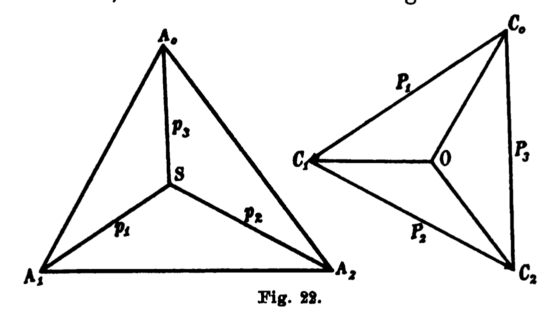


Fig. 22.

Suchen wir nun von den Ecken $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{O}$ dieses Tetraeders die Nullebenen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \omega$, so bilden dieselben ein zweites, zu dem ersten reziprokes Tetraeder, dessen Ecken mit $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}$ bezeichnet seien. Projizieren wir dieses Tetraeder wieder orthogonal auf die Grundebene, so erhalten wir ein neues vollständiges Viereck A_0, A_1, A_2, S. Ein in diesem enthaltenes Dreieck A_0, A_1, A_2 bildet hier das Seileck, und die Linien SA_0, SA_1, SA_2 sind die Wirkungslinien der äußeren Kräfte, diese Wirkungslinien gehen sonach in dem vorliegenden Falle durch einen Punkt S.

Wir wollen die Beziehung zwischen den beiden Tetraedern noch etwas ausführlicher betrachten. Je drei Ecken des zweiten liegen in der Nullebene einer Ecke des ersten, sind dieser Ecke also konjugiert, und zwar setzen wir voraus, es seien

der Ecke $\mathfrak{C}_0$ die Ecken $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}$,
" " $\mathfrak{C}_1$ " " $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}$,
" " $\mathfrak{C}_2$ " " $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{S}$,
" " $\mathfrak{O}$ " " $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$

konjugiert. Dann sind umgekehrt z. B. der Ecke $\mathfrak{A}_0$ des zweiten Tetraeders die Ecken $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{O}$ des ersten Tetraeders konjugiert, d. h. die Verbindungsebene α_0 von $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{O}$ ist die Nullebene von $\mathfrak{A}_0$ und enthält somit diesen Punkt. Es enthalten demnach die Ebenen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \sigma$ des zweiten Tetraeders die einzelnen Ecken $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}$ des ersten Tetraeders, ebenso wie die Ebenen des ersten Tetraeders durch die Ecken des zweiten Tetraeders gehen, d. h. die beiden Tetraeder sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben.

Die beiden Tetraeder sind reziproke Figuren in dem Nullsystem, die Ecken des einen entsprechen den Ebenen des anderen, und die Kanten des einen sind die reziproken Polaren von den Kanten des andern. Ihre Beziehung ist durchaus wechselseitig, und das Gleiche läßt sich von ihren Projektionen auf die Grundebene sagen; man bezeichnet deshalb auch diese Projektionsfiguren als reziproke Figuren. Jede von ihnen läßt sich als Kräfteplan der anderen als Lageplan gedeuteten Figur auffassen. Es bleibt auch willkürlich, welches von den vier Dreiecken des den Lageplan bildenden vollständigen Vierecks man als Seileck deuten will. Jedesmal gehört zu diesem Seileck ein Eckpunkt des anderen Vierecks als Kräftepol. So sind den Dreiecken $A_0A_1A_2$, A_0A_1S, A_1A_2S, A_2A_0S der Reihe nach die Punkte O, C_0, C_1, C_2 als Kräftepole zugeordnet. Jedem dreieckigen „Fach" der einen Figur ist eine Ecke oder ein „Knotenpunkt" der andern Figur zugeordnet. Der Strecke, längs welcher zwei Fächer der einen Figur aneinander grenzen, entspricht die Verbindungsstrecke der zugehörigen Pole in der andern Figur. Solche zwei Strecken entstehen durch Projektion aus zwei Tetraederkanten, die als reziproke Polaren in dem Nullsystem einander zugeordnet sind, ihre Beziehung ist also wieder durchaus wechselseitig: auch der zweiten Strecke ist als gemeinsamer Begrenzung zweier Fächer die Verbindungsstrecke der diesen Fächern entsprechenden Punkte in der andern Figur zugeordnet.

Wir wollen aus diesen Betrachtungen noch die einfache Regel besonders herausheben, daß, wenn drei Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewichte sind, ihre Wirkungslinien p_1, p_2, p_3 durch einen Punkt S gehen und sie selbst sich ohne Änderung ihrer Größe und Richtung zu einem Dreiecke von bestimmtem Unlaufssinne aneinander legen lassen müssen. Weiter zeigt sich, daß man die Resultante P zweier Kräfte P_1, P_2, deren Wirkungslinien sich schneiden, findet,

indem man die Kräfte an den Schnittpunkt S der beiden Wirkungslinien verlegt und dann durch diesen Punkt S die Diagonale des Parallelogramms zieht, das die beiden Kräfte als zwei Seiten bestimmen. Diese Diagonale stellt in dem vom Punkte S ausgehenden Richtungssinne genommen die gesuchte Resultante P der Größe und Richtung nach dar.

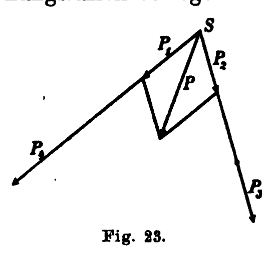


Fig. 23.

Wir können auch für zwei parallele Kräfte die Konstruktion der Resultante leicht aus der zugehörigen Raumfigur ableiten. Diese Raumfigur besteht aus den Momentenebenen der gegebenen Kräfte und der resultierenden Kraft, und wir verwenden die für die letztere Momentenebene gegebene Raumkonstruktion. Die Momentenebenen η_1, η_2 der beiden gegebenen Kräfte gehen durch die parallelen Wirkungslinien a_1, a_2 der Kräfte hindurch und schneiden die Vertikalebenen, die man jedesmal in der anderen von diesen beiden Linien errichtet, in zwei Linien $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, die wieder zu a_1, a_2 und zueinander parallel sind und auch die Verbindungsebene von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ schneidet die Grundebene in einer Linie a, die zu a_1 und a_2 parallel ist. Sind φ_1', φ_2' die Neigungswinkel der ersten beiden Ebenen η_1, η_2 gegen die Grundebene, so werden die Abstände der Linien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ von der Grundebene

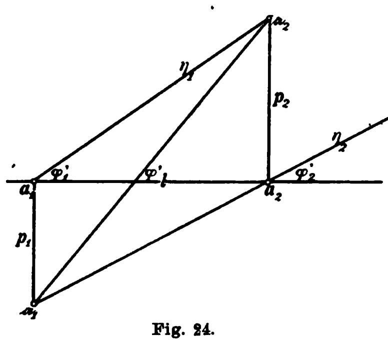


Fig. 24.

$$p_1 = l \cdot \operatorname{tang} \varphi_2',$$
$$p_2 = l \cdot \operatorname{tang} \varphi_1',$$

wobei l den Abstand der Linien a_1, a_2 bezeichnet. Daraus ergibt sich für das Verhältnis, in dem dieser Abstand durch a geteilt wird, sofort

$$x : (l - x) = \operatorname{tang} \varphi_2' : \operatorname{tang} \varphi_1',$$

indem x den Abstand der Linien a_1 und a bedeutet. Nennen wir aber R_1, R_2 die Größe der beiden parallelen Kräfte, mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen genommen, je nachdem die Kräfte gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, so wird

$$\operatorname{tang} \varphi_2' : \operatorname{tang} \varphi_1' = R_2 : R_1$$

und somit

$$x : (l - x) = R_2 : R_1.$$

Dies ist das Archimedische Hebelgesetz. Nennen wir φ' die Neigung der resultierenden Momentenebene, so ergibt sich

$$x \cdot \operatorname{tang} \varphi' = l \cdot \operatorname{tang} \varphi_2', \quad (l - x) \cdot \operatorname{tang} \varphi' = l \cdot \operatorname{tang} \varphi_1',$$

und damit

$$\operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} \varphi_1' + \operatorname{tang} \varphi_2',$$

woraus für die Größe R der resultierenden Kraft

$$R = R_1 + R_2$$

folgt. Man sieht sofort, daß für zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, ein „Poinsotsches Kräftepaar“, die Bildung der Resultante versagt, denn für $R_2 = -R_1$ wird $R = 0$, $x = \infty$. Dann ist die resultierende Momentenebene parallel zur Grundebene, und der konstante Abstand dieser beiden Ebenen gibt das Moment des Kräftepaares an.

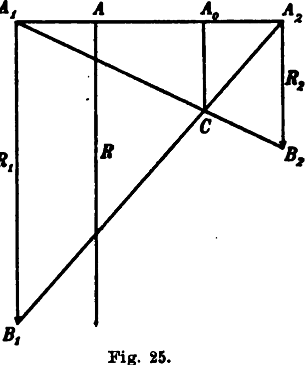


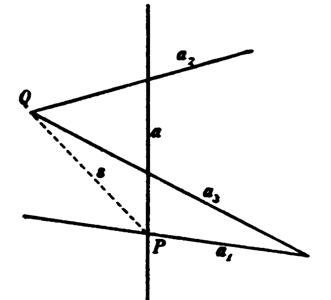
Fig. 25.

Für den Wert von x ergibt sich im allgemeinen Falle die folgende einfache Konstruktion. Seien A_1B_1 und A_2B_2 die beiden Kräfte, so verbinde man A_1B_2 und A_2B_1, durch den Schnittpunkt C dieser beiden Linien ziehe man die Parallele zu den Kräften, die A_1A_2 in A_0 treffen möge. Trägt man dann die Strecke A_2A_0, die $= x$ wird, von A_1 aus in der entgegengesetzten Richtung ab, so ist der Endpunkt A der so gewonnenen Strecke der Angriffspunkt der resultierenden Kraft. Es ergibt sich nämlich:

$$A_0A_2 : A_1A_0 = CA_2 : B_1C = A_2B_2 : A_1B_1 = R_2 : R_1.$$

Eine Kraft läßt sich immer in zwei Seitenkräfte nach zwei beliebig gegebenen, aber verschiedenen Richtungen zerlegen. Eine Kraft läßt sich aber auch im allgemeinen in drei Seitenkräfte R_1, R_2, R_3 zerfällen, deren Wirkungslinien a_1, a_2, a_3 vorgeschrieben sind. Die graphische Lösung dieser Aufgabe geschieht so, daß man den Schnittpunkt P der Linie a, in der die gegebene Kraft R wirkt, mit einer der gegebenen Wirkungslinien,

etwa a_1, sucht, und ihn mit dem Schnittpunkte Q der anderen beiden Wirkungslinien a_2, a_3 durch eine Gerade s verbindet. Dann läßt sich ein Kräfteplan konstruieren, der aus einem Viereck mit



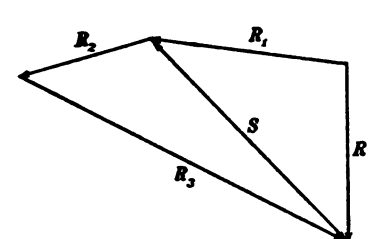


Fig. 26.

den Seiten R_0, R_1, R_2, R_3 und einer Diagonale S besteht, so daß diese vier Linien der Reihe nach den Linien a, a_1, a_2, a_3 und s parallel sind und die Kräfte R_1, R_2, R_3 im Sinne eines Umlaufs um das Viereck, der die vierte Seite in dem der Kraft R entgegengesetzten Sinne durchstreicht, aufeinanderfolgen. Der Beweis beruht darauf, daß man durch die Kräfte R_1, R_2, R_3, $-R$ sowohl am Punkte P wie auch am Punkte Q Gleichgewicht herstellt, derart daß die beidemal in die Linie PQ oder s fallenden Kräfte einander entgegengesetzt gleich und durch die Diagonale S im Viereck des Kräfteplans dargestellt werden.

Diese graphische Methode läßt nicht unmittelbar und sicher die Fälle erkennen, in denen sie versagt. Es ist deswegen von Nutzen, auch die analytische Lösung zu geben, um so mehr als an diesem einfachen Beispiele sich der verschiedenartige Charakter der analytischen und synthetischen Betrachtungsweise deutlich zeigt und ihre beiderseitigen Vorzüge sich abwägen lassen.

Wir legen die gegebene Kraft durch die auch oben verwendeten Koordinaten X, Y, Z fest und nennen $(X_1\, Y_1\, Z_1)$, $(X_2\, Y_2\, Z_2)$, $(X_3\, Y_3\, Z_3)$ in analoger Weise die Koordinaten der gesuchten Seitenkräfte. Dann erfordern die Bedingungen des Problems, daß

$$X_1 + X_2 + X_3 = X,$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = Y,$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = Z$$

wird. Sind nun α_1, α_2, α_3 die Winkel, welche die Wirkungslinien

der Seitenkräfte mit der positiven x-Achse einschließen und p_1, p_2, p_3 die Abstände dieser Wirkungslinien vom Koordinatenursprung, endlich R_1, R_2, R_3 die Größe der Kräfte, positiv genommen, wenn die Kräfte in positivem Sinne um den Koordinatenursprung drehen, und negativ im entgegengesetzten Falle, so wird

$$X_i = R_i \cos \alpha_i,\quad Y_i = R_i \sin \alpha_i,\quad Z_i = R_i p_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und die vorigen Gleichungen verwandeln sich in

$$\begin{aligned} R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 + R_3 \cos \alpha_3 &= X, \\ R_1 \sin \alpha_1 + R_2 \sin \alpha_2 + R_3 \sin \alpha_3 &= Y, \\ R_1 p_1 \quad + R_2 p_2 \quad + R_3 p_3 \quad &= Z. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind jetzt R_1, R_2, R_3 die einzigen unbekannten Größen, und wir haben zur Bestimmung der drei Unbekannten drei lineare Gleichungen vor uns. Diese lassen sich nach den Unbekannten im allgemeinen auflösen und ergeben sie in eindeutiger Weise. Die einzige zu erfüllende Bedingung ist die, daß, wenn man aus den Gleichungen zwei der Unbekannten eliminiert, nicht auch von selbst die dritte Unbekannte herausfällt. Eliminiert man z. B. R_2, R_3, so ergibt sich allgemein eine Gleichung von der Gestalt

$$\Delta \cdot R_1 = \Delta_{11} X + \Delta_{12} Y + \Delta_{13} Z.$$

Aus dieser Gleichung fällt R_1 heraus, und die Auflösung wird illusorisch, wenn $\Delta = 0$ ist. Die in Rede stehende Elimination wird wirklich ausgeführt, indem man die Gleichungen der Reihe nach multipliziert mit

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= p_2 \sin \alpha_3 - p_3 \sin \alpha_2, \\ \Delta_{12} &= -p_2 \cos \alpha_3 + p_3 \cos \alpha_2, \\ \Delta_{13} &= \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 = \sin(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned}$$

So aber ergibt sich für $\Delta = \Delta_{11} \cos \alpha_1 + \Delta_{12} \sin \alpha_1 + \Delta_{13} p_1$ nach einer leichten Reduktion der Wert

$$\Delta = p_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + p_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + p_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

und dieser Ausdruck darf, damit die Aufgabe lösbar sei, nicht verschwinden. Es zeigt sich nun, daß er in folgenden drei Fällen gleich 0 ist:

1. wenn zwei der drei gegebenen Wirkungslinien zusammenfallen,

2. wenn alle drei Wirkungslinien parallel sind,

3. wenn alle drei Wirkungslinien durch einen Punkt gehen.

Das erste sieht man sofort ein, denn wenn man z. B. $p_2 = p_3$, $\alpha_2 = \alpha_3$ macht, so zerstören sich die beiden letzten Glieder des Ausdruckes für Δ, und das erste Glied wird 0, weil der Sinus verschwindet. Im zweiten Falle wird $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, und somit verschwinden alle drei Sinus. Im dritten Falle sei P der Punkt, durch den alle drei Wirkungslinien hindurchgehen, dann nennen wir p den Abstand dieses Punktes P vom Koordinatenursprung C_0, α_0 den Winkel, den die Linie C_0P mit der positiven x-Achse einschließt, und finden

$$p_1 = p \cos(\alpha_1 - \alpha_0), \quad p_2 = p \cos(\alpha_2 - \alpha_0), \quad p_3 = p \cos(\alpha_3 - \alpha_0).$$

Setzen wir noch $\alpha_1 - \alpha_0 = \beta_1$, $\alpha_2 - \alpha_0 = \beta_2$, $\alpha_3 - \alpha_0 = \beta_3$, so ergibt sich

$$\Delta = p\left[\cos\beta_1 \sin(\beta_2 - \beta_3) + \cos\beta_2 \sin(\beta_3 - \beta_1) + \cos\beta_3 \sin(\beta_1 - \beta_2)\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet aber identisch, und damit wird auch $\Delta = 0$, w. z. b. w.

Es läßt sich sehr einfach nachweisen, daß die drei angegebenen Fälle auch die einzigen sind, in denen Δ verschwindet. Denn schneiden sich zwei von den drei Wirkungslinien, so kann man den beliebig bleibenden Koordinatenursprung in den Schnittpunkt S legen, also etwa $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ annehmen und $\alpha_2 - \alpha_3 \neq 0$. Dann wird aber $\Delta = p_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ und verschwindet nur dann, wenn $p_1 = 0$, also auch die dritte Wirkungslinie durch S geht.

Fünftes Kapitel.

Vereinigung eines allgemeinen ebenen Kräftesystems.

Nach diesen speziellen Aufgaben wollen wir das allgemeine Problem behandeln, für ein beliebiges ebenes Kräftesystem, von welchem die Wirkungslinien der Kräfte, ihre Größe und ihr Sinn gegeben sind, die resultierende Kraft zu finden. Eine Lösung dieser Aufgabe, die auf der Verwendung des Seilecks beruht, haben wir bereits erörtert. Aus dieser Lösung läßt sich ein von Hause aus noch näher liegendes Verfahren dadurch ableiten, daß man in dem Kräftepolygon, das zu dem Seileck gehört, den Kräftepol O in den Anfangspunkt C_0 des Kräftezuges $C_0 C_1 C_2 \ldots$ rücken läßt. Dann

beginnt das Seileck $a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit der Wirkungslinie a_1 der ersten Kraft, und die Seilkräfte werden der Reihe nach: die erste Kraft selbst, die Resultante R_2 der ersten und zweiten Kraft, die Resultante R_3 der ersten, zweiten und dritten Kraft usw. Die letzte Seilkraft ist die gesuchte Resultante selbst.

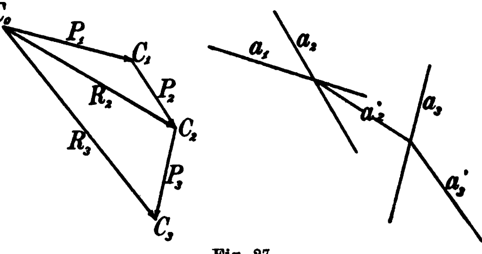


Fig. 27.

Dieses Verfahren ist das einfachste, das existiert. Es leidet aber an dem Mangel, daß unter den Schnittpunkten, die man bei der Zeichnung zu bestimmen hat, leicht einige über den Rand des Zeichenblattes hinaus, ja bis in unendliche Entfernung fallen. Z. B. versagt es völlig in dem praktisch außerordentlich wichtigen Falle, wo alle die gegebenen Kräfte parallel sind. Deswegen ist die Aufgabe vielmehr so zu stellen, daß ein möglichst allgemeines, wenn auch viel umständlicheres Verfahren gefunden werden soll, welches in allen Fällen anwendbar bleibt.

Zu einem solchen Verfahren führt der Begriff des Fachwerkes. Dieses ist für uns eine geometrische Figur, die nur unter gewissen Umständen auch eine materielle Bedeutung gewinnt. Wir beschränken uns vorerst auf eine besondere Art von Fachwerken, welche direkt aus der Forderung hervorgehen, eine Anzahl Punkte in der Ebene derart miteinander zu verbinden, daß ohne Änderung der gezogenen Verbindungsstrecken keine Änderung in den gegenseitigen Entfernungen der Punkte, also in Gestalt und Größe der von ihnen gebildeten geometrischen Figur möglich ist. Dies erreichen wir auf folgende Weise: Wir bezeichnen die gegebenen Punkte, deren Zahl $n+2$ sei, in irgendeiner Reihenfolge durch die Ziffern

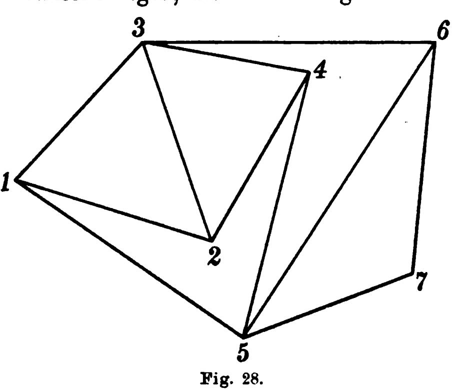


Fig. 28.

1 bis $n + 2$. Dann verbinden wir die Punkte 1, 2, 3 miteinander, den Punkt 4 mit zweien der drei Punkte 1, 2, 3, den Punkt 5 mit zweien der vier Punkte 1, 2, 3, 4 usw., allgemein jeden Punkt mit irgend zweien der voraufgehenden Punkte. So entsteht eine Figur, bei der in der Tat die Eckpunkte oder Knotenpunkte gegeneinander nicht verschoben werden können, ohne die Länge wenigstens einer der gezogenen Verbindungsstrecken zu ändern.

Die Bezeichnung Fachwerk rührt daher, daß die gezeichnete Figur sich aus einzelnen Vielecken, den Fächern, zusammensetzen läßt, die nebeneinander liegen oder auch einander teilweise überdecken können. Sei die Zeichnung bis zu einem Punkte μ vorgedrungen, dann entsteht aus der Hinzufügung des Punktes $\mu + 1$ ein Fach in der Weise, daß man zu den beiden Strecken, die von diesem Punkte ausgehen, einen Streckenzug aus der Figur der ersten μ Punkte hinzunimmt, der die beiden anderen Endpunkte jener zwei Strecken miteinander verbindet. Die Fächer, aus denen sich die Figur zusammensetzt, sind also im allgemeinen durch die gezogenen Verbindungsstrecken keineswegs eindeutig bestimmt, wohl aber ist ihre Anzahl auf die angegebene Art festgelegt, indem das erste Fach das von den drei Knotenpunkten 123 gebildete Dreieck ist und mit jedem neuen Knotenpunkt ein Fach hinzukommt. Die Anzahl der Fächer ist demnach um 2 kleiner als die Zahl der Knotenpunkte, also gleich n.

Obwohl die folgenden Erörterungen auch auf dies allgemeine „Zweistabfachwerk" bezogen werden können, gewinnen sie doch an Anschaulichkeit, wenn wir uns auf eine besondere Art von solchen Fachwerken beschränken. Wir wollen nämlich die Forderung aufstellen, daß allgemein in der durch die μ ersten Knotenpunkte gebildeten Figur die beiden Knotenpunkte, mit welchen der $(\mu + 1)^{\text{te}}$ Knotenpunkt verbunden wird, durch eine der bereits gezogenen Verbindungsstrecken (einen Stab des Fachwerkes) verbunden sein sollen. Dann bildet diese Verbindungsstrecke mit den hinzukommenden beiden Verbindungsstrecken zusammen ein dreieckiges Fach der Fachwerkfigur, und von dieser Art sind alle Fächer der Figur. Wir sprechen daher von einem Dreiecksfachwerk.

Wollen wir noch die weitere Forderung hinzufügen, daß in dem Fachwerk keine Übereinanderlagerung einzelner Fächer vorkommen soll, so müssen wir den hinzukommenden $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Knotenpunkt mit zwei Knotenpunkten auf dem äußeren Umriß der

von den μ ersten Knotenpunkten gebildeten Figur verbinden, und der hinzukommende Knotenpunkt darf nicht innerhalb dieses Umrisses enthalten sein. Der Stab, mit dessen Endpunkten er verbunden wird, tritt dann notwendigerweise in das Innere der neu entstehenden Figur und kann in keinem der weiter hinzukommenden Fächer enthalten sein. Die Stäbe, die den Rand der schließlich entstehenden Figur bilden, gehören somit nur zu einem einzigen Fache. Sie sollen die Randstäbe heißen. Alle anderen, im Innern der entstehenden Figur gelegenen Stäbe gehören dagegen zu zwei, aber auch nicht zu mehr Fächern. Sie sollen als die inneren oder Diagonalstäbe des Fachwerkes bezeichnet werden. Alle Knotenpunkte des Fachwerkes gehören seinem Rande an, denn bei dem Hinzutreten des $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Knotenpunktes zu den μ ersten rückt kein Knotenpunkt in das Innere der neu entstehenden Figur. Es bleiben also überhaupt alle Knotenpunkte auf dem Rande, und die Diagonalstäbe verbinden immer zwei Randpunkte miteinander, wodurch ihr Name gerechtfertigt wird.

Bei den jetzt folgenden Betrachtungen genügt es, an die zuletzt beschriebenen Fachwerke zu denken, doch lassen sie sich auch auf die anderen Arten anwenden. Wir wollen die Knotenpunkte des Fachwerkes als die bestimmt gegebenen Angriffspunkte gewisser Kräfte ansehen. Wir denken uns ferner jeden Stab des Fachwerkes als Träger zweier „inneren" Kräfte, die in seine Richtung fallen, in seinen Endpunkten angreifen und einander entgegengesetzt gleich sind. Wir nehmen endlich an, von den „äußeren" Kräften, die in den Knotenpunkten angreifen, seien alle bis auf die Kräfte in den zwei ersten Knotenpunkten und von der Kraft im zweiten Knotenpunkte auch noch die Richtung willkürlich gegeben. Wir wollen dann zeigen, daß sich die fehlenden Kräfte und die inneren Kräfte so bestimmen lassen, daß die an jedem einzelnen Knotenpunkte insgesamt angreifenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Durch den letzten Knotenpunkt gehen nur zwei Stäbe; die dort angreifende äußere Kraft läßt sich sonach in zwei Komponenten zerlegen, die in diese Stäbe fallen, oder es läßt sich ihr das Gleichgewicht halten durch zwei (den Komponenten entgegengesetzt gleiche) Kräfte, die in die beiden Stäbe fallen. Diese letzteren müssen die inneren Kräfte sein, die in den beiden letzten Stäben

wirken und am letzten Knotenpunkte angreifen, und die Komponenten der letzten äußeren Kraft liefern selbst die inneren Kräfte in den beiden letzten Stäben, so wie sie an deren anderen Endpunkten angreifen. Lassen wir dann die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte am letzten Knotenpunkte weg und vereinigen die äußere Kraft in jedem der beiden Knotenpunkte, die mit dem letzten Knotenpunkt verbunden waren, mit der in diesem Punkte angreifenden und nach dem letzten Knotenpunkte hin gerichteten inneren Kraft, die wir bereits bestimmt haben, zu einer resultierenden Kraft, so haben wir eine genau ebensolche Fachwerkfigur vor uns wie vorher, nur hat sich die Zahl der Knotenpunkte und der Fächer um 1 vermindert. Wir können also ebenso vorgehen wie vorher, und die inneren Kräfte in den zwei Stäben, die jetzt durch den vorletzten Knotenpunkt des ursprünglichen Fachwerks gehen, bestimmen. So können wir fortfahren, bis nur noch das erste Fach übrig ist. Wir haben dann ein Dreieck vor uns, an dessen einem Endpunkte eine gegebene Kraft angreift, also ein Hängewerk allereinfachster Art. Wir suchen die Kräfte in den durch den Angriffspunkt der gegebenen Kraft gehenden Dreiecksseiten, die der gegebenen Kraft das Gleichgewicht halten, und bringen in den beiden übrigen Ecken, d. h. den ersten beiden Knotenpunkten des Fachwerks, die den gefundenen Kräften entgegengesetzt gleichen an. Im Punkte 2 nehmen wir noch eine Richtung beliebig, nur von der der Linie 2 1 verschieden, an und bestimmen zwei Kräfte, die eine in der angenommenen Richtung, die andere in den Stab 2 1 fallend, die der äußeren Kraft und der im Stab 2 3 bestimmten inneren Kraft im Punkte 2 das Gleichgewicht halten. Zu der so im Stabe 2 1 gefundenen Kraft nehmen wir im Punkte 1 angreifend die entgegengesetzt gleiche Kraft und suchen darauf zu dieser und der im Punkte 1 angreifenden und in

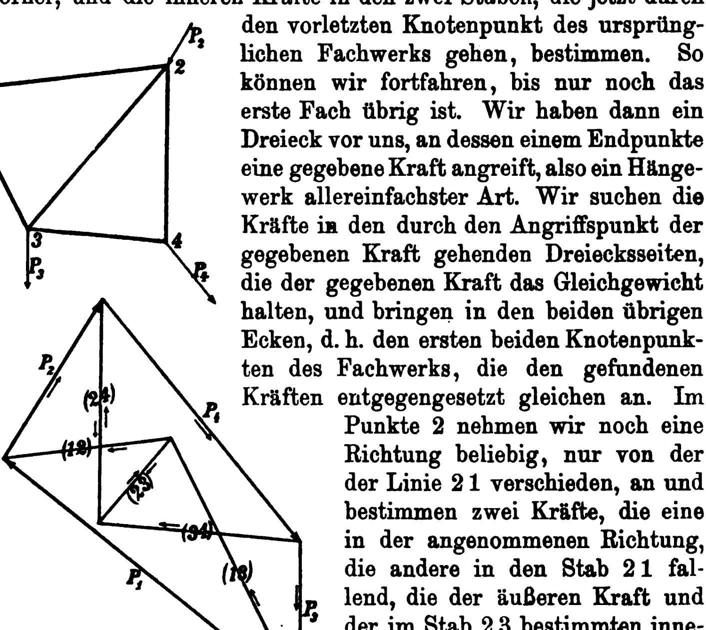


Fig. 29.

den Stab 13 fallenden Kraft die diesen beiden das Gleichgewicht haltende Kraft. Dann halten die nunmehr in allen Ecken des Fachwerks angreifenden äußeren, d. h. nicht in die Stäbe fallenden Kräfte einander das Gleichgewicht.

Dies ist leicht daraus zu sehen, daß für die zwei in einen Stab fallenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte die von uns benutzten Kraftkoordinaten von der Form sind

$$X_{ij},\ Y_{ij},\ Z_{ij} \quad \text{und} \quad X_{ji} = -X_{ij},\ Y_{ji} = -Y_{ij},\ Z_{ji} = -Z_{ij}.$$

Da nun an jedem einzelnen Knotenpunkte Gleichgewicht besteht, so ergeben sich, wenn z. B. der Knotenpunkt i mit den Knotenpunkten $j, k, l, \ldots$ durch Stäbe verbunden ist und X_i, Y_i, Z_i die Koordinaten der in ihm angreifenden äußeren Kraft sind, Gleichungen von folgender Form:

$$X_i + X_{ij} + X_{ik} + X_{il} + \cdots = 0,$$
$$Y_i + Y_{ij} + Y_{ik} + Y_{il} + \cdots = 0,$$
$$Z_i + Z_{ij} + Z_{ik} + Z_{il} + \cdots = 0.$$

Addiert man nun die entsprechenden Gleichungen aller so entstehenden Gleichungssysteme zueinander, so heben sich in den Summen die von den inneren Kräften herrührenden Koordinaten infolge der vorangehenden Beziehungen, da sie zu Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte auftreten, paarweise fort, und es bleiben übrig die Gleichungen

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0,$$

wobei sich die Summation über alle Knotenpunkte zu erstrecken hat.

Auf diese Weise erkennen wir die Richtigkeit folgenden Satzes: Ein jedes Kräftesystem läßt sich ins Gleichgewicht bringen durch zwei in gegebenen Punkten angreifende Kräfte, von denen die eine außerdem eine beliebig gegebene Richtung hat, die nur nicht in die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte fallen darf. Die beiden Kräfte sind auf diese Weise vollständig und eindeutig bestimmt.

Nach der im vorigen Kapitel behandelten speziellen Aufgabe läßt sich aber im allgemeinen eine einzige Kraft finden, welche den beiden gefundenen Kräften das Gleichgewicht hält, und zwar nach verschiedenen Methoden, je nachdem die Wirkungslinien der beiden Kräfte sich schneiden oder parallel sind. Aus-

geschlossen ist hierbei allein der Fall, wo die beiden Kräfte bei entgegengesetzten Richtungen gleiche Größe haben. Dann ist eine Reduktion der beiden Kräfte auf eine einzige unmöglich. In allen anderen Fällen liefert die gefundene Einzelkraft die gesuchte Resultante des Kräftesystems.

Die dargestellte allgemeine Methode zur Auffindung der Resultante eines ebenen Kräftesystems, welche auch dann zum Ziele führt, wenn das Kräftesystem nicht durch eine Einzelkraft, sondern nur durch ein Kräftepaar ersetzt werden kann, läßt sich nun auf verschiedene Art spezialisieren und liefert dann die gebräuchlichen Methoden der Kräftevereinigung.

Zunächst kann man ein spezielles Dreiecksfachwerk betrachten, dessen sämtliche Dreiecke eine Seite gemein haben. Dann ist ein von dem vorigen etwas abweichendes Verfahren natürlicher. Man kann nämlich die Endpunkte M, N der gemeinsamen Seite als die Punkte ansehen, in denen die zu bestimmenden Kräfte angreifen sollen, also die gegebenen Kräfte in den übrigen Knotenpunkten $A_1, A_2, \dots A_n$, durch die nur zwei Stäbe gehen, annehmen. Wir wollen dabei auch die Forderung, daß von einer der beiden zu bestimmenden Kräfte die Richtung gegeben sein soll, ersetzen durch die Forderung, daß die in den allen Fächern gemeinsamen Stab MN fallenden Kräfte verschwinden.

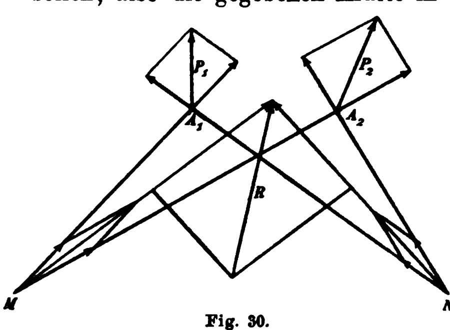


Fig. 30.

Dann erhalten wir sofort folgende einfache Lösung: Man zerlege die in den Punkten A_1, A_2, ... angreifenden Kräfte P_1, P_2, ... jedesmal in zwei Komponenten, die in die Verbindungslinien des betr. Punktes mit den Punkten M, N fallen. Diese Komponenten verlege man alle an die Punkte M und N und suche darauf zu den sämtlichen am Punkte M und allen am Punkte N angreifenden Kräften nach der Polygonregel je eine sie ins Gleichgewicht bringende Kraft. Die beiden so resultierenden Kräfte stellen die Lösung der Aufgabe dar. Die Kraft, welche die zwei gefundenen Kräfte ins

Gleichgewicht setzt, ist die resultierende Kraft R des gegebenen Systems.

Aus dem behandelten allgemeinen Verfahren unmittelbar ableitbar ist folgendes. Man nehme zu den Angriffspunkten der gegebenen Kräfte $A_1, A_2, \dots A_n$ noch einen weiteren Punkt A_{n+1} hinzu und verbinde alle diese Punkte durch einen Streckenzug. Außerdem ziehe man von einem beliebig weiter angenommenen Punkte S nach ihnen hin die Verbindungsstrecken. So entsteht

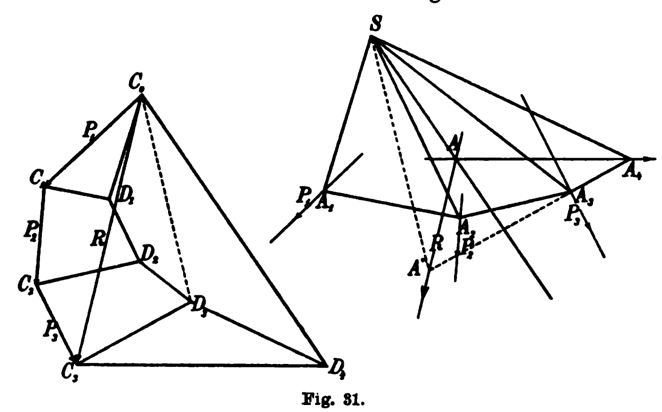


Fig. 31.

ein besonderes Dreiecksfachwerk, in dem die an A_{n+1} und S angreifenden Kräfte zu bestimmen sind. Von der ersteren sei die Richtung g irgendwie gegeben. Die Bestimmung der zwei gesuchten Kräfte kann dann durch einen einfachen Kräfteplan geschehen, der eine gewisse Verwandtschaft mit dem Kräfteplan des Seilecks zeigt.

Man lege die in $A_1, A_2, \dots A_n$ angreifenden Kräfte $P_1, P_2, \dots P_n$ in dieser Reihenfolge zu einem Streckenzuge $C_0 C_1 C_2 \dots C_n$ aneinander und ziehe durch $C_1, C_2, \dots C_n$ die Parallelen zu den Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \dots A_nA_{n+1}$. Auf diesen Parallelen bestimme man die Punkte $D_1, D_2, \dots D_n$ derart, daß die Strecken des Streckenzuges $C_0D_1D_2 \dots D_n$ den Strecken, die S mit $A_1, A_2, \dots A_n$ verbinden, parallel werden. Dann geben $C_1D_1, C_2D_2, \dots C_nD_n$ die in den Stäben $A_1A_2, A_2A_3, \dots A_nA_{n+1}$ wirkenden Kräfte an, $C_0D_1, D_1D_2, \dots D_{n-1}D_n$ die Kräfte in den Stäben $SA_1, SA_2, \dots SA_n$. Ferner konstruiere man einen Punkt D_{n+1}, indem man durch C_n die Parallele zu der für den Punkt A_{n+1}

gegebenen Kraftrichtung g und durch D_n die Parallele zu der Strecke SA_{n+1} zieht. $C_n D_{n+1}$ gibt dann die in A_{n+1} angreifende äußere Kraft der Größe und Richtung nach an. Verbindet man C_0 mit D_{n+1}, so ist dies die Resultierende aller in S angreifenden inneren Kräfte. Fällt im besonderen C_n mit C_0 zusammen, so wird die Resultierende der in S angreifenden Kräfte entgegengesetzt gleich der in A_{n+1} wirkenden äußeren Kraft. Man findet also ein Kräftepaar, das dem gegebenen Kräftesystem das Gleichgewicht hält, und wenn man die Richtungen der Kräfte dieses Paares umkehrt, ein Kräftepaar, das die Resultante des vorgelegten Kräftesystems bildet. Fällt dagegen C_n nicht mit C_0 zusammen, so ziehe man durch S eine Parallele zu $C_0 D_{n+1}$, durch A_{n+1} die Parallele g zu $C_n D_{n+1}$, dann ist der Schnittpunkt A dieser beiden Linien der Punkt, in dem man die resultierende Kraft, deren Größe und Richtung durch $C_0 C_n$ gegeben wird, angreifen lassen kann.

Dieses Verfahren, das von Eddy herrührt, läßt sich noch dadurch verallgemeinern, daß man zu Anfang in dem Punkte A_1 eine Hilfskraft H hinzufügt, die im Kräfteplan durch eine Strecke $C_0 D_0$ der Größe und Richtung nach dargestellt wird. Dann bleibt alles ungeändert, nur geht der zweite Streckenzug im Kräfteplan nicht mehr von C_0, sondern von D_0 aus. Im Lageplan gehen dann durch A_1 und A_{n+1} zwei gegebene Linien h und g, welche die Richtungen der Hilfskraft in A_1 und der in A_{n+1} zu bestimmenden Kraft angeben. Um die eingeführte Hilfskraft H nachträglich wieder aufzuheben, ist sie noch einmal als eine Strecke $C_n C_{n+1}$ der Größe und Richtung nach abzutragen. Darauf hat man in dem Schnittpunkt U von h und g eine Kraft, die der Größe und Richtung nach durch die Strecke $D_{n+1} C_{n+1}$ gegeben wird, angreifen zu lassen und in S die Kraft $D_0 D_{n+1}$. Die Resultante dieser beiden Kräfte ist auch die Resultante des vorgelegten Kräftesystems

Aus diesem etwas verallgemeinerten Verfahren ist das Seileckverfahren leicht als ein ganz besonderer Fall herzuleiten. In diesem Falle werden die Angriffspunkte der Kräfte auf den gegebenen Wirkungslinien, d. h. der Streckenzug $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_{n+1}$ so bestimmt, daß im Kräfteplan der Streckenzug $D_0 D_1 \ldots D_n$ zu einem Punkte O zusammenschrumpft, d. h. die Figur des Lageplans, die im allgemeinen Falle als gegeben angesehen wird, wird hier mit Hilfe des Kräfteplans so festgelegt, daß die in die Strecken

$SA_1, \ldots SA_n$ fallenden Kräfte verschwinden. Es liegt dann nahe, auch am Punkte A_{n+1} die Richtung der zu bestimmenden Kraft nicht vorzuschreiben, sondern dies durch die Forderung zu ersetzen, daß auch die in die Strecke $A_{n+1}S$ fallende Seitenkraft verschwinden soll. Dann wird die Kraft im Punkte A_{n+1} direkt gleich der im Punkte A_n angreifenden und in dem Stabe A_nA_{n+1} wirkenden Kraft, und auch der Punkt D_{n+1} fällt nach O. Auf diese Weise werden in der Figur des Lageplans die Punkte S und A_{n+1} überflüssig, und das Fachwerk reduziert sich auf das Seileck, da mit S auch alle von S ausgehenden Strecken in Wegfall kommen und die in S vorher gefundene resultierende Kraft verschwindet. Als die einzigen resultierenden Kräfte ergeben sich die Kräfte in der ersten und letzten Seileckseite, von denen die erstere völlig willkürlich bleibt und der Größe und Richtung nach durch die Strecke OC_0 bestimmt wird. Die Kraft, welche diese beiden Seilkräfte ins Gleichgewicht bringt, ist die gesuchte Resultante des Kräftesystems und kann im Schnittpunkte der ersten und letzten Seileckseite angebracht werden, wie wir früher bereits (S. 19) gefunden haben.

Die Vereinfachung, daß man am Punkte A_{n+1} nicht die Richtung der zu bestimmenden Kraft vorschreibt, sondern fordert, daß die in den Stab $A_{n+1}S$ fallenden inneren Kräfte verschwinden sollen, läßt sich auch auf das Eddysche Verfahren selbst anwenden, wenn man die Richtung der Strecke A_nA_{n+1} nicht als gegeben, sondern als zu bestimmen ansieht. Dann fällt im Kräfteplan D_{n+1} mit D_n zusammen. Die Richtung von A_nA_{n+1} ist die Richtung von C_nD_n. Man hat also durch A_n in dieser Richtung, durch S in der Richtung von C_0D_n die Geraden zu ziehen, deren Schnittpunkt A'' den gesuchten Angriffspunkt der (ihrer Größe und Richtung nach durch C_0C_n gegebenen) Resultante liefert.

Das Eddysche Verfahren ist angebracht, wenn die Angriffspunkte der vorgelegten Kräfte bestimmte Lage haben. Sind sie aber in der Wirkungslinie der Kraft beliebig verschiebbar, so liegt es nahe, sie so zu verschieben, daß sie alle in eine gerade Linie fallen. So gelangt man zu dem allgemeinen Problem des Gleichgewichtes am Hebel, d. h. des Gleichgewichtes zwischen beliebigen, an Punkten einer geradlinigen Stange angreifenden Kräften. Sind $A_1, A_2, \ldots A_n$ wieder die Angriffspunkte der Kräfte, die jetzt in einer Geraden g liegen, so hat man diese mit einem beliebig außerhalb g gewählten Punkte S durch Strahlen $s_1, s_2, \ldots s_n$ zu ver-

binden. Um dann die Resultante zu bestimmen, stellt man die Kräfte P_1, P_2, ... wieder durch die Stücke eines Streckenzuges $C_1 C_0 \ldots C_n$ dar, dessen Abschlußlinie $C_0 C_n$ die Resultante der Größe und Richtung nach liefert, zieht, da $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ usw. alle die Richtung von g haben, durch C_1, C_2, ... C_n die Parallelen zu g und schneidet diese durch Parallelen zu s_1, s_2, ... s_n derart, daß der neue Streckenzug $C_0 D_1 \ldots D_n$ entsteht, dessen Stücke den Strahlen durch S parallel sind. Die Parallele durch S zu $C_0 D_n$ schneidet dann aus g den gesuchten Angriffspunkt A der resultierenden Kraft aus. Dieses Verfahren rührt von Hollender her.

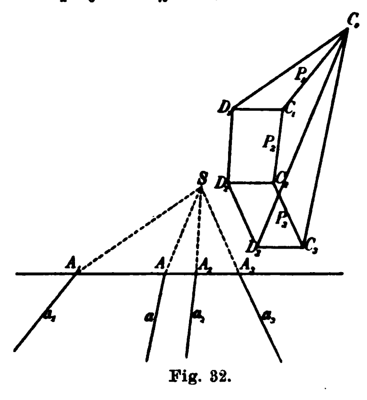


Fig. 32.

Für parallele Kräfte können wir ihm, wenn wir die Punkte C_0 und S zusammenfallen lassen, folgende besonders einfache Form geben: Man trage die parallelen Kräfte von der letzten anfangend auf einem Strahle c, der von einem beliebigen Punkte C_n der Geraden g aus in der Richtung der Kräfte gezogen ist, hintereinander ab als die Strecken $C_n C_{n-1}$, ... $C_2 C_1$, $C_1 C_0$. Von dem Punkte C_0 läßt man dann einen Streckenzug $C_0 D_1 D_2 \ldots D_n$ ausgehen, dessen einzelne Punkte auf den Parallelen durch C_1, C_2, ... C_n zu g liegen und dessen Strecken der Reihe nach den Strahlen $C_0 A_1$, $C_0 A_2$, ... $C_0 A_n$ parallel sind. Der Endpunkt D_n dieses Streckenzuges fällt auf g und ist der gesuchte Angriffspunkt der resultierenden Kraft, deren Größe durch die Strecke $C_0 C_n$ gegeben wird.

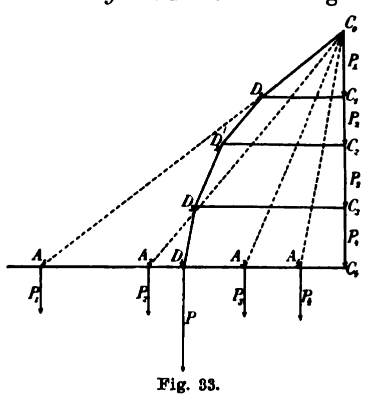


Fig. 33.

Diese Methode ist, wie man sieht, an sich ebenso einfach wie das Seileckverfahren, doch dürfte sie diesem in den weiteren Anwendungen an Brauchbarkeit kaum ebenbürtig sein.

Sechstes Kapitel.

Dreiecksfachwerke mit durchlaufendem Diagonalzuge.

Seiner großen praktischen Wichtigkeit wegen wollen wir zunächst noch ein spezielles Fachwerk betrachten, nämlich ein Dreiecksfachwerk, bei dem jedes Dreieck an eine Seite des vorhergehenden Dreiecks derart angefügt ist, daß die Diagonalstäbe einen fortlaufenden Streckenzug bilden und alle Fächer nebeneinander liegen, so daß keine Überdeckungen vorkommen. Im ersten und letzten Fach finden sich dann zwei Knotenpunkte A und B, durch die nur je zwei Stäbe des Fachwerkes gehen, und von denen wir annehmen, daß sie links und rechts das Fachwerk begrenzen.

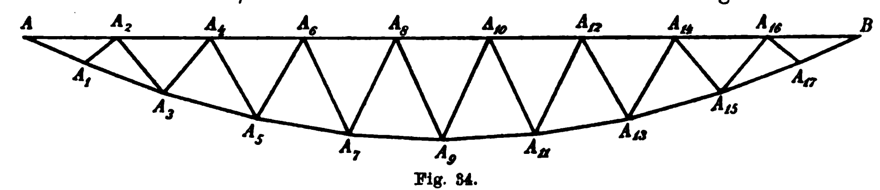


Fig. 34.

Von der Berandung des Fachwerkes nennen wir das obere zwischen A und B liegende Stück die obere Gurtung, das übrig bleibende untere Stück die untere Gurtung. Der Zug der Diagonalstäbe nimmt dann seinen Anfang von dem zweiten Endpunkte A_1 eines der beiden von A ausgehenden Stäbe und endet

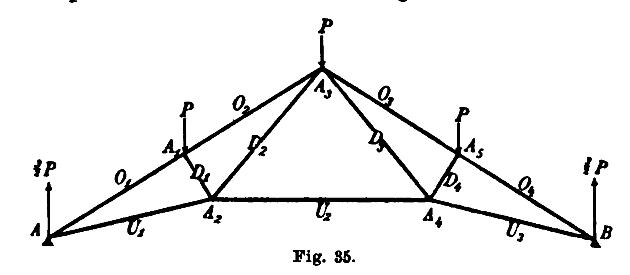


Fig. 35.

in dem zweiten Endpunkte A_n eines der durch B gehenden Stäbe. Dem Diagonalzug folgend sei die Reihe der Knotenpunkte $A_1 A_2 A_3 \ldots . A_n$. Dann hat das i^{te} Fach die Eckpunkte $A_{i-1} A_i A_{i+1}$, insbesondere das erste Fach die Eckpunkte $A A_1 A_2$, das letzte, n^{te} Fach die Eckpunkte $A_{n-1} A_n B$. Um sofort ein Beispiel

von einem solchen Fachwerke zu geben, ist in Fig. 35 ein einfacher Polonceauträger gezeichnet und in Fig. 36 dessen Kräfteplan konstruiert. Die Kräfte dieses Kräfteplans gehören jedesmal zu den gleich bezeichneten Stäben des Fachwerkes. Das Dach ist unter einer gleichförmig verteilten Last gedacht, auf die Knotenpunkte A_1, A_3, A_5 entfällt also die gleiche Vertikalkraft P. In den Auflagerpunkten A, B wirken die Reaktionskräfte vertikal nach aufwärts; da sie infolge der Symmetrie der Figur gleich sind und die algebraische Summe aller Kräfte verschwinden muß, ergeben sie sich beide gleich $\frac{3}{2}P$. Will man den Kräfteplan als eine zusammenhängende Fläche auffassen, so hat man sich hier eine eigentümlich gefaltete und zusammengelegte Fläche vorzustellen.

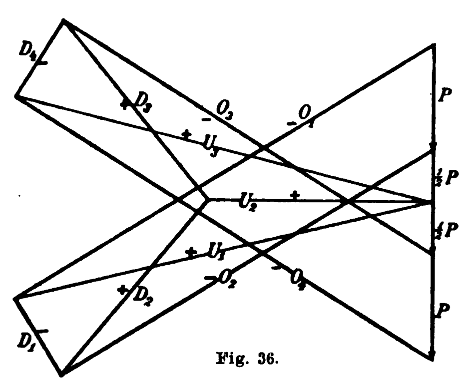


Fig. 36.

Ähnlich ist es bei der folgenden Figur 37. Hier ist das Fachwerk als die linke Hälfte eines in seiner oberen Gurtung gleichförmig belasteten Parallelträgers anzusehen. Die Spannung U_1 in dem ersten Stabe der unteren Gurtung wird 0, weil sonst an dem Stützpunkt A nur vertikale Kräfte wirken. Dieser Stützpunkt trägt die halbe Last des ganzen Fachwerkes, also ist der in den Stab AA_1 als Druckspannung übertragene Auflagedruck gleich $\frac{5}{2}P$. Danach nimmt der Kräfteplan für diese Fachwerkhälfte die darunter in Fig. 38 gezeichnete Form an. Den Fächern des Fachwerkes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_6$ sind die Punkte C_1, $C_2, \ldots C_6$ im Kräfteplan, die einen zickzackförmigen Linienzug bestimmen, zugeordnet, indem die Spannungskräfte in den Rändern

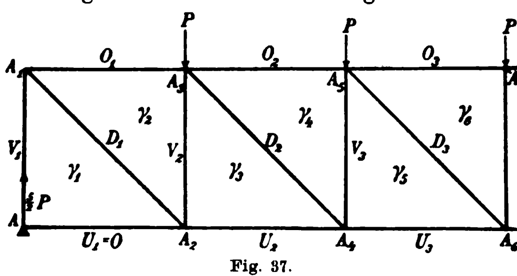


Fig. 37.

eines Faches in dem Kräfteplan durch den diesem Fache zugeordneten Punkt gehen.

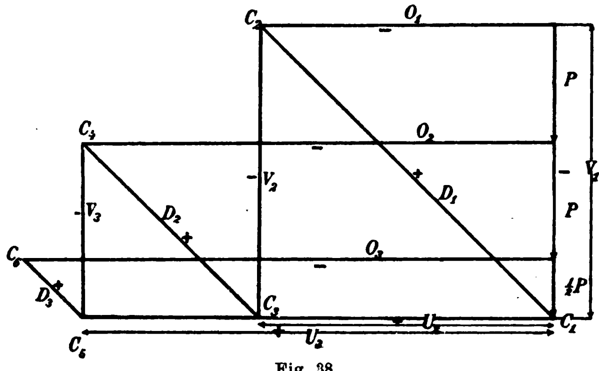


Fig. 38.

Wir wollen nun das Problem für diese Art von Fachwerken ganz allgemein formulieren und lösen.

In den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ mögen beliebig gegebene äußere Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ angreifen, in den Punkten A, B seien dann zwei Kräfte angebracht, P_0 und P_{n+1}, von denen P_{n+1} eine gegebene Richtung hat und die derart bestimmt sind, daß sie den übrigen Kräften das Gleichgewicht halten. Die Bestimmung dieser beiden Reaktionskräfte denken wir uns durch eine Raumkonstruktion ausgeführt, indem wir mit X_i, Y_i, Z_i die Koordinaten der Kraft P_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ bezeichnen und die Strecken, deren Komponenten nach den räumlichen Koordinatenachsen diese Kraftkoordinaten sind, vom Koordinatenursprung ausgehend zu einem Streckenzuge aneinander legen; der Endpunkt dieses Streckenzuges habe die Koordinaten $\mathfrak{X}_{n+1}, \mathfrak{Y}_{n+1}, \mathfrak{Z}_{n+1}$. Es ist dann

$$(1)\quad \mathfrak{X}_{n+1} = X_1 + \cdots + X_n,\ \mathfrak{Y}_{n+1} = Y_1 + \cdots + Y_n,\ \mathfrak{Z}_{n+1} = Z_1 + \cdots + Z_n.$$

Wenn nun x_0, y_0 die Koordinaten von A, X_0, Y_0 die Komponenten der zu bestimmenden Kraft P_0, die in A angreift, ferner x_{n+1}, y_{n+1} die Koordinaten von B, und X_{n+1}, Y_{n+1} die Komponenten der Kraft P_{n+1}, die in B angreift, sind, wenn wir endlich durch den Winkel α, den sie mit der x-Achse bildet, die gegebene Richtung dieser letzteren Kraft festlegen, so wird

$$X_{n+1} = R \cos \alpha,\quad Y_{n+1} = R \sin \alpha,$$

wobei R die unbekannte Größe der Kraft bezeichnet, und ferner ist

$$Z_{n+1} = R(x_{n+1} \sin\alpha - y_{n+1} \cos\alpha)$$
$$Z_0 \quad = Y_0 x_0 - X_0 y_0$$

zu setzen. Die Bedingungen des Gleichgewichts erfordern aber

$$X_0 = -\mathfrak{X}_{n+1} - X_{n+1},\ Y_0 = -\mathfrak{Y}_{n+1} - Y_{n+1},\ Z_0 = -\mathfrak{Z}_{n+1} - Z_{n+1},$$

und somit ergibt sich durch Einsetzen dieser Werte von X_0, Y_0, Z_0 und der voranstehenden Werte von X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1} in die Gleichung für Z_0 für R die Gleichung:

$$R[(x_0 - x_{n+1})\sin\alpha - (y_0 - y_{n+1})\cos\alpha] = \mathfrak{Z}_{n+1} - \mathfrak{Y}_{n+1} x_0 + \mathfrak{X}_{n+1} y_0;$$

aus dieser folgt, wenn nicht

$$(x_0 - x_{n+1}) : (y_0 - y_{n+1}) = \cos\alpha : \sin\alpha,$$

d. h. wenn, wie wir es annehmen wollen, die gegebene Richtung von der der Linie AB verschieden ist, R in eindeutiger Weise, und damit sind die zwei Kräfte $(X_{n+1} Y_{n+1} Z_{n+1})$, $(X_0 Y_0 Z_0)$, welche den windschiefen Streckenzug der Kräfte zu einem geschlossenen windschiefen Polygon machen, gefunden.

Wir wollen jetzt die Reihenfolge der Kräfte in diesem windschiefen Polygon ändern, indem wir sie in der Reihenfolge eines Umlaufes um den Rand des Fachwerkes nehmen. Dies bedeutet für die Indices ihrer Koordinaten die Reihenfolge

$$1, 3, 5, \ldots n-1, n+1, n, n-2, \ldots 2, 0,$$

wenn n gerade, und

$$1, 3, 5, \ldots n-2, n, n+1, n-1, \ldots 2, 0,$$

wenn n ungerade ist. So entsteht ein neues windschiefes Polygon, dessen Ecken in der nun gewählten Reihenfolge die Koordinaten

$$(\mathfrak{X}_1\, \mathfrak{Y}_1\, \mathfrak{Z}_1), (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2), \ldots (\mathfrak{X}_{n+2}, \mathfrak{Y}_{n+2}, \mathfrak{Z}_{n+2})$$

haben mögen. Es wird dann

$$(2) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_1 = X_1, \quad \mathfrak{Y}_1 = Y_1, \quad \mathfrak{Z}_1 = Z_1 \\ &\mathfrak{X}_2 = X_1 + X_3, \ \mathfrak{Y}_2 = Y_1 + Y_3, \ \mathfrak{Z}_2 = Z_1 + Z_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathfrak{X}_{n+2} = -X_0, \ \mathfrak{Y}_{n+2} = -Y_0, \ \mathfrak{Z}_{n+2} = -Z_0. \end{aligned}$$

Wir führen nun auch die Koordinaten der inneren Kräfte ein, die in dem Streckenzuge der Diagonalstäbe 0 1 2 3 ... $(n+1)$ wirken und an den Knotenpunkten der Gurtung $0, 2, 4 \ldots, n+1$ angreifen:

$$(X_{10}, Y_{10}, Z_{10}), (X_{12}, X_{12}, Z_{12}), (X_{32}, Y_{32}, Z_{32}) \text{ usw.}$$

und setzen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_1' = X_{10}, \quad \mathfrak{Y}_1' = Y_{10}, \quad \mathfrak{Z}_1' = Z_{10},\\
&\mathfrak{X}_2' = X_{10} + X_{12}, \mathfrak{Y}_2' = X_{10} + Y_{12}, \mathfrak{Z}_2' = Z_{10} + Z_{12},\\
(3) \quad &\mathfrak{X}_3' = X_{10} + X_{12} + X_{32}, \quad \mathfrak{Y}'_3 = Y_{10} + Y_{12} + Y_{32},\\
&\mathfrak{Z}'_3 = Z_{10} + Z_{12} + Z_{32},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die inneren Kräfte in den noch fehlenden Randstäben bestimmen wir aus den Bedingungen des Gleichgewichtes an den einzelnen Knotenpunkten. Wir finden so z. B.

$$X_{13} = -X_{31} = X_1 + X_{01} + X_{21} = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}'_2,$$

und analog

$$\mathfrak{Y}_{13} = \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2', \ \mathfrak{Z}_{13} = \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}'_2.$$

Ebenso wird

$$X_{35} = X_3 + X_{13} + X_{23} + X_{43} = \mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}'_4,$$

und analog

$$\mathfrak{Y}_{35} = \mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}'_4, \ \mathfrak{Z}_{35} = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_4',$$

allgemein ist

$$(4) \qquad \begin{cases} X_{2i-1,2i+1} = \mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_{2i}',\\ Y_{2i-1,2i+1} = \mathfrak{Y}_i - \mathfrak{Y}_{2i}',\\ Z_{2i-1,2i+1} = \mathfrak{Z}_i - \mathfrak{Z}_{2i}'. \end{cases}$$

Ferner wird

$$X_{20} = -X_0 - X_{10} = \mathfrak{X}_{n+2} - \mathfrak{X}_1',$$

$$Y_{20} = \mathfrak{Y}_{n+2} - \mathfrak{Y}_1', \ Z_{20} = \mathfrak{Z}_{n+2} - \mathfrak{Z}_1',$$

$$X_{42} = \mathfrak{X}_{n+1} - \mathfrak{X}_3', \ Y_{42} = \mathfrak{Y}_{n+1} - \mathfrak{Y}_3', \ Z_{42} = \mathfrak{Z}_{n+1} - \mathfrak{Z}_3',$$

allgemein

$$(5) \qquad \begin{cases} X_{2i+2,2i} = \mathfrak{X}_{n+2-i} - \mathfrak{X}'_{2i+1},\\ Y_{2i+2,2i} = \mathfrak{Y}_{n+2-i} - \mathfrak{Y}'_{2i+1},\\ Z_{2i+2,2i} = \mathfrak{Z}_{n+2-i} - \mathfrak{Z}'_{2i+1}. \end{cases}$$

Damit ist die Bestimmung der inneren Kräfte vollendet, und diese ergeben sich in der geometrischen Deutung als die geradlinigen Verbindungsstrecken einer Raumfigur, die durch die Punkte $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \dots \mathfrak{E}_{n+2}$ und $\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \dots \mathfrak{E}_{n+1}'$ gebildet wird, wobei $\mathfrak{E}_0$ der Koordinatenursprung ist und $\mathfrak{E}_i$ die Koordinaten $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$, $\mathfrak{E}_j'$ die Koordinaten $\mathfrak{X}_j'$, $\mathfrak{Y}_j'$, $\mathfrak{Z}_j'$ bekommt. Die Strecken des Streckenzuges $\mathfrak{E}_0 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \dots$ liefern uns die äußeren Kräfte, die Strecken des Streckenzuges $\mathfrak{E}_0' \mathfrak{E}_1' \mathfrak{E}_2' \dots$ die inneren Kräfte in den Diagonalen. Außerdem ist allgemein $\mathfrak{E}_{2i}'$ mit $\mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{E}_{2i+1}'$ mit $\mathfrak{E}_{n+2-i}$ verbunden. Die Projektion dieser Figur auf die Grundebene liefert den ebenen Kräfteplan, in welchem die sämtlichen in dem Fachwerk wirkenden Kräfte der Größe und Richtung nach dargestellt sind.

Wir haben nun nachzuweisen, daß die reziproke Figur des räumlichen Kräfteplans durch ihre Projektion auf die Grundebene das Fachwerk selbst mitsamt den Wirkungslinien der äußeren Kräfte liefert. Um diesen Nachweis möglichst einfach und anschaulich zu geben, betrachten wir zunächst die Nullebenen der Punkte $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_2'$, $\mathfrak{E}_3'$, $\mathfrak{E}_4'$ und zeigen, daß sie alle fünf durch einen Punkt $\mathfrak{A}_3$ über A_3 gehen. Ihre Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_1 - z &= \mathfrak{Y}_1\, x - \mathfrak{X}_1\, y, \\
\mathfrak{Z}_2 - z &= \mathfrak{Y}_2\, x - \mathfrak{X}_2\, y, \\
\mathfrak{Z}_2' - z &= \mathfrak{Y}_2'\, x - \mathfrak{X}_2'\, y, \\
\mathfrak{Z}_3' - z &= \mathfrak{Y}_3'\, x - \mathfrak{X}_3'\, y, \\
\mathfrak{Z}_4' - z &= \mathfrak{Y}_4'\, x - \mathfrak{X}_4'\, y.
\end{aligned}$$

Es wird nun

$$Z_{32} = Y_{32}\, x_3 - X_{32}\, y_3, \quad Z_{34} = Y_{34}\, x_3 - X_{34}\, y_3,$$

wenn x_3, y_3 die Koordinaten von A_3 sind, weil dieser Punkt auf den Wirkungslinien der inneren Kräfte in den Stäben 23 und 34 liegt, daher werden für $x = x_3$, $y = y_3$, infolge der Bedeutung der Größen $\mathfrak{X}_2'$, $\mathfrak{Y}_2'$, $\mathfrak{Z}_2'$ etc., die letzten beiden der vorstehenden fünf Gleichungen mit der dritten identisch. Sie liefern also alle drei denselben Wert

$$z_3 = (Z_{10} + Z_{12}) - (Y_{10} + Y_{12})\, x_3 + (X_{01} + X_{21})\, y_3.$$

Da aber weiter die Gleichung

$$Z_3 = Y_3\, x_3 - X_3\, y_3$$

besteht, wird die zweite der fünf Gleichungen für $x = x_3$, $y = y_3$ mit der ersten identisch, und diese liefert für diese Werte von x, y

$$z_3' = Z_1 - Y_1 x_3 + X_1 y_3.$$

Addiert man hierzu die ebenfalls erfüllte Gleichung

$$0 = Z_{31} - Y_{31} x_3 + X_{31} y_3,$$

so ergibt sich

$$z_3' = (Z_1 + Z_{31}) - (Y_1 + Y_{31}) x_3 + (X_1 + X_{31}) y_3,$$

und somit wird $z_3 = z_3'$, denn infolge des Gleichgewichtes am Punkte A_1 ist

$$(X_1 + X_{31}) = (X_{10} + X_{12}) \text{ etc.}$$

Die fünf Ebenen gehen demnach wirklich alle durch denselben Punkt $\mathfrak{A}_3$ über A_3 hindurch, und Ähnliches ergibt sich auch für alle anderen Knotenpunkte. Nehmen wir also von der Nullebene jedes Punktes $\mathfrak{C}_i'$ nur das Stück, das über dem i^{ten} Fache liegt, so erfüllen diese ebenen Flächenstücke insgesamt eine Polyederschale, die über dem Fachwerke liegt, und zwar wird die Ordinate des über A_i liegenden Eckpunktes $\mathfrak{A}_i$ dieser Polyederschale

$$(6) \qquad z_i = \mathfrak{Z}_{i-1}' - \mathfrak{Y}_{i-1}' x_i + \mathfrak{X}_{i-1}' y_i.$$

Berücksichtigt man die Werte (3) von $\mathfrak{X}_{i-1}'$, $\mathfrak{Y}_{i-1}'$, $\mathfrak{Z}_{i-1}'$, so kann man diese Gleichung folgendermaßen deuten: Die Ordinaten werden angegeben durch die statischen Momente der in den Diagonalen (links von einem sie alle durchschneidenden Wege) wirkenden Kräfte, genommen in der Reihenfolge des Diagonalzuges und fortgeführt bis zu dem Knotenpunkte, für den das statische Moment genommen und in ihm als Ordinate aufgetragen wird.

Die Nullebenen γ_i der Punkte $\mathfrak{C}_i$ wollen wir nur bis an die Polyederschale heranreichen lassen, mit der sie je eine Kante des Randes gemein haben, und sie auch immer nur bis zur Schnittlinie mit der nächstvorhergehenden und der nächstfolgenden der Nullebenen γ nehmen. Die Projektionen dieser Schnittlinien sind die Wirkungslinien der äußeren Kräfte, weil sie jedesmal durch den Raumpunkt $\mathfrak{A}_i$ über dem Angriffspunkt A_i der betreffenden äußeren Kraft hindurchgehen und ihre Richtung mit der Richtung der Kraft, die durch ihre auf die Grundebene projizierte reziproke Polare geliefert wird, übereinstimmt. So erhalten wir eine zeltförmige Raumfigur über dem Fachwerk, deren Decke aus drei-

eckigen Facetten besteht. Diese Facetten liegen über den Fächern des Fachwerkes, und die Wände des Zeltes bestehen aus viereckigen Stücken, die über den Wirkungslinien der äußeren Kräfte aneinander stoßen.

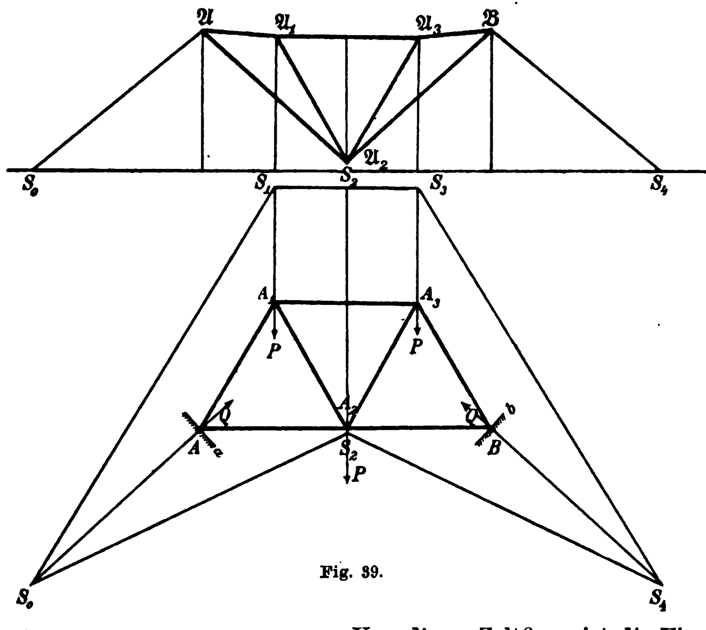
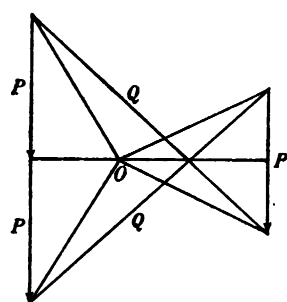


Fig. 39.



Von dieser Zeltfigur ist die Figur des Kräfteplans die reziproke Figur in dem Nullsystem. Ihre Ecken sind die Nullpunkte der ebenen Flächen der ersten Figur, und jeder Linie, in der zwei benachbarte Flächen der Zeltfigur aneinanderstoßen, ist die Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte in der Figur des Kräfteplans zugeordnet, die, auf die Grundebene projiziert, eine der an oder in dem Fachwerke wirkenden Kräfte der Größe und Richtung nach darstellt.

Um hiervon eine anschauliche Darstellung zu geben, ist in der nebenstehenden Abbildung die Zeltfigur für ein ganz ein-

faches Fachwerk, das aus drei gleichseitigen Dreiecken besteht, gezeichnet worden. Das Fachwerk ist in den Knotenpunkten A_1, A_2, A_3 durch Vertikalkräfte von der gleichen Größe P belastet, und der Auflagerdruck in A und B steht zu bestimmt geneigten Linien a, b senkrecht. Für einen Kräftepol O ist das Seileck $S_0 S_1 S_3 S_4 S_2 S_0$ gezeichnet. Die Zeltfigur ist im Aufriß durch die Eckpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}$ bestimmt. Von diesen Eckpunkten denken wir uns nach den zugehörigen Ecken des Seileckes in der Grundebene die Linien gezogen. Sie begrenzen die Wände des Zeltes oder bilden, wenn wir uns die Wände fortgenommen denken, die Zeltleinen.

Siebentes Kapitel.

Bestimmte Fachwerke.

Die bis jetzt betrachteten Fachwerke sind nur spezielle Fälle viel allgemeinerer Gebilde. Im allgemeinsten Sinne können wir als ein Fachwerk eine geometrische Figur bezeichnen, in der eine gewisse Anzahl Punkte durch so viel Verbindungsstrecken verbunden sind, daß durch jeden Punkt mindestens zwei dieser Strecken gehen. Die Punkte heißen die Knotenpunkte, die Verbindungsstrecken die Stäbe des Fachwerkes. Die Anzahl der ersteren sei k, die Anzahl der letzteren s.

Wir führen sofort ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen Ursprung wir in einen Knotenpunkt legen und dessen y-Achse wir mit einem der Stäbe des Fachwerkes zusammenfallen lassen. Dann werden für den ersten Knotenpunkt die Koordinaten

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0.$$

Für einen zweiten Knotenpunkt werden die Koordinaten x_2, y_2, wobei

$$x_2 = 0,$$

und nun wollen wir weiter mit $(x_3, y_3), \ldots (x_k, y_k)$ der Reihe nach die Koordinaten der übrigen Knotenpunkte bezeichnen. Im ganzen erhalten wir $2k - 3$ von Null verschiedene Knotenpunktskoordinaten.

Jeden Knotenpunkt bezeichnen wir durch den Index seiner Koordinaten. Die Länge des Stabes, der die Knotenpunkte mit

den Indices a, b verbindet, bezeichnen wir mit s_{ab}, ferner mit φ_{ab} den Winkel, den die Richtung dieses Stabes mit der positiven x-Achse einschließt. Es wird dann

$$(1) \qquad x_b - x_a = s_{ab} \cdot \cos\varphi_{ab}, \; y_b - y_a = s_{ab} \cdot \sin\varphi_{ab},$$

und somit folgt umgekehrt

$$s_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2},$$

$$(2) \qquad \cos\varphi_{ab} = \frac{x_b - x_a}{s_{ab}}, \; \sin\varphi_{ab} = \frac{y_b - y_a}{s_{ab}}.$$

In seiner völligen Allgemeinheit wollen wir aber das Fachwerk nicht betrachten. Wir wollen vielmehr annehmen, das Fachwerk sei bestimmt, oder genau gesprochen, kinematisch bestimmt. Das bedeutet: es ist, wenn ein Knotenpunkt und die Richtung eines durch ihn gehenden Stabes festgehalten wird, keine endliche oder unendlich kleine Verschiebung irgendwelcher Knotenpunkte in der Ebene des Fachwerkes möglich, bei der sich nicht die Längen gewisser Stäbe ändern, dagegen wird diese Eigenschaft sofort zerstört, sowie man einen einzigen Stab des Fachwerkes entfernt. Mit anderen Worten, die Unverschieblichkeit der Teile des Fachwerkes wird gerade durch die vorhandenen, aber nicht durch eine geringere Anzahl Stäbe gewährleistet. Jeder weiter hinzugefügte Stab wäre ein überzähliger Stab, d. h. er könnte wieder entfernt werden, ohne daß die kinematische Bestimmtheit des Fachwerkes darunter litte.

Wir wollen nun die analytischen Bedingungen für die Bestimmtheit des Fachwerkes zu formulieren suchen. Wir beschränken uns darauf, unendlich geringe Lagenänderungen der Knotenpunkte in Betracht zu ziehen, die ohne Änderung der Stablängen auch unmöglich sein müssen, wenn das Fachwerk ein unverschiebliches Gefüge darstellt. Wir wollen für eine unendlich kleine Verschiebung des Knotenpunktes mit dem Index a die Komponenten nach den Koordinatenachsen mit ξ_a, η_a bezeichnen. Den ersten Knotenpunkt wollen wir festhalten, es wird also $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$. Ebenso wollen wir die (mit der y-Achse zusammenfallende) Richtung des Stabes (12) festhalten, es wird also auch $\xi_2 = 0$.

Das Quadrat der Länge l_{ab} des Stabes (ab) wird nun nach der Verschiebung

$$l_{ab}^2 = (x_b + \xi_b - x_a - \xi_a)^2 + (y_b + \eta_b - y_a - \eta_a)^2.$$

Ziehen wir hiervon das Quadrat der ursprünglichen Länge ab, so finden wir für den Zuwachs dieses Quadrates bei Vernachlässigung der Glieder, welche die unendlich kleinen Größen ξ, η zur zweiten Dimension enthalten,

$$2\left[(x_b - x_a)(\xi_b - \xi_a) + (y_b - y_a)(\eta_b - \eta_a)\right].$$

Die so bestimmte Änderung des Quadrates der Stablänge müßte aber generell verschwinden, wenn eine Verschiebung mit unveränderten Stablängen möglich wäre. Wir gelangen demnach zu dem Gleichungssystem:

$$(3) \qquad (x_b - x_a)(\xi_b - \xi_a) + (y_b - y_a)(\eta_b - \eta_a) = 0,$$

das aus s Gleichungen, nämlich so viel Gleichungen, wie Stäbe vorhanden sind, besteht.

Da $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ sein soll, ist die Anzahl der möglicherweise von Null verschiedenen Größen ξ, η in den vorstehenden Gleichungen, kurz gesagt die Anzahl der Unbekannten, gleich $2k - 3$.

Nehmen wir nun zunächst an, die Anzahl der Gleichungen s sei $< 2k - 3$, d. h. kleiner als die Anzahl der Unbekannten. Dann lassen sich für die letzteren immer unendlich viele Kombinationen von wenigstens zum Teil von Null verschiedenen Werten bestimmen, für welche die s Gleichungen erfüllt sind, d. h. es ist eine Verschiebung der betrachteten Art ohne Änderung der Stablängen immer möglich, und das Fachwerk ist nie bestimmt.

Nehmen wir aber $s = 2k - 3$, so ist in dem System homogener linearer Gleichungen die Anzahl der Unbekannten gerade gleich der Anzahl der Gleichungen, und die letzteren sind nur dann für wenigstens teilweise von Null verschiedene Werte der Unbekannten erfüllbar, wenn es sich gerade so fügt, daß bei Elimination von $s - 1$ Unbekannten aus den Gleichungen die letzte Unbekannte ebenfalls herausfällt. Dies bedeutet aber das Verschwinden des bei der Elimination als Koeffizient der letzten Unbekannten auftretenden Ausdruckes Δ, der die Determinante des Gleichungssystemes heißt.

Wenn also die Zahl der Stäbe $s = 2k - 3$ ist und die Determinante $\Delta \neq 0$ wird, so ist eine Verschiebung der Teile des Fachwerkes gegeneinander ohne Änderung der Stablängen unmöglich. Dies ist aber auch bei keiner geringeren Zahl von Stäben der Fall, und die

gefundenen Bedingungen sind demnach die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß das Fachwerk kinematisch bestimmt ist.

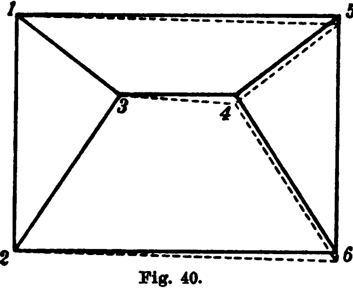


Fig. 40.

Ein Beispiel für ein Fachwerk, das, obwohl es die genügende Anzahl Stäbe besitzt, kinematisch unbestimmt ist, stellt die nebenstehende Figur dar, in der durch die punktierten Linien eine mögliche unendlich kleine Verschiebung des rechten Dreiecks gegen das linke Dreieck angedeutet ist.

Wir lassen nun in irgendwelchen Knotenpunkten des Fachwerkes **äußere Kräfte** angreifen, und zwar nennen wir die Komponenten der in dem Knotenpunkte a angreifenden Kraft X_a, Y_a, indem wir immer $X_a = 0$, $Y_a = 0$ nehmen, wenn gerade in dem betreffenden Knotenpunkte keine äußere Kraft angreift. Wir wollen nun suchen, in den Stäben des Fachwerkes Paare entgegengesetzt gleicher **innerer Kräfte** oder **Spannungskräfte** derart anzubringen, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht. Wir nennen hierbei die Komponenten der Kraft, die in dem Stabe (ab) an dem Knotenpunkte a angreift X_{ba}, Y_{ba}. Die Komponenten der Kraft, die in demselben Stabe an dem anderen Knotenpunkte angreift, sind dann

(4) $$X_{ab} = -X_{ba},\quad Y_{ab} = -Y_{ba}.$$

Da die Kraftrichtung mit der Stabrichtung zusammenfällt, finden wir sofort

(5) $$X_{ba} = S_{ab}\cos\varphi_{ba},\quad Y_{ba} = S_{ba}\sin\varphi_{ab},$$

wobei S_{ba} eine positive oder negative Zahl bedeutet, die wir als die **Stabspannung** bezeichnen. Ist $S_{ba} > 0$, so sind die Kräfte in dem Stabe aufeinander zu, ist $S_{ba} < 0$, so sind sie voneinander weg gerichtet. Im ersten Falle sprechen wir von einer **Zugspannung**, im letzteren von einer **Druckspannung**.*) Durch Einsetzen der Werte von $\cos\varphi_{ab}$, $\sin\varphi_{ab}$ ergibt sich

(6) $$X_{ba} = S_{ba}\frac{x_b - x_a}{s_{ab}},\quad Y_{ba} = S_{ba}\frac{y_b - y_a}{s_{ab}}.$$

---

*) In den Figuren ist Zugspannung durch ein beigesetztes +, Druckspannung durch — bezeichnet.

Analog wird

(6a) $$X_{ab} = S_{ab}\frac{x_a - x_b}{s_{ab}}, \quad Y_{ab} = S_{ab}\frac{y_a - y_b}{s_{ab}},$$

und da diese Werte den vorigen entgegengesetzt gleich sein sollen, muß

(7) $$S_{ab} = S_{ba}$$

angenommen werden.

Wenn an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herrscht, so muß auch zwischen den äußeren Kräften Gleichgewicht bestehen, d. h. es sind die drei Gleichungen erfüllt

(8) $$\sum_a X_a = 0, \quad \sum_a Y_a = 0, \quad \sum_a Z_a = 0,$$

die Summation über alle Knotenpunkte erstreckt, wobei

$$Z_a = Y_a x_a - X_a y_a$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen resultieren in der Tat, wenn man die Gleichungen, die für jeden einzelnen Knotenpunkt gelten,

$$X_a + \sum_b X_{ba} = 0, \quad Y_a + \sum_b Y_{ba} = 0, \quad Z_a + \sum_b Z_{ba} = 0$$

für $a = 1, 2, \ldots k$ bildet und dann die Summation nach diesen Indices ausführt. Hierbei heben sich die von den inneren Kräften herrührenden Bestandteile wegen der Relationen (4), aus denen auch $Z_{ab} = - Z_{ba}$ folgt, paarweise weg, und es ergeben sich die obenstehenden Gleichungen.

Von den drei für den Knotenpunkt a aufgestellten Gleichungen ist die letzte, da

$$Z_a = Y_a x_a - X_a y_a, \quad Z_{ba} = Y_{ba} x_a - X_{ba} y_a$$

ist, eine einfache Folge der übrigen. Setzt man in diese die Werte von X_{ba}, Y_{ba} aus (6) ein, so werden sie

(9) $$\sum_b \sigma_{ba}(x_b - x_a) = - X_a, \quad \sum_b \sigma_{ba}(y_b - y_a) = - Y_a,$$

indem wir die spezifischen Spannungen

(10) $$\sigma_{ba} = \frac{S_{ba}}{s_{ba}}$$

einführen. Wir fragen nun, wann das Spannungsproblem eindeutig bestimmt ist, d. h. welches die notwendigen und hinreichen-

den Bedingungen dafür sind, daß die Gleichungen (9) für die spezifischen Spannungen σ_{ba} eine und nur eine Lösung liefern.

Die erste Bedingung ist die, daß die Anzahl der linearen Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt. Die Anzahl der Unbekannten ist gleich der Anzahl der Stäbe, also s. Die Anzahl der Gleichungen ist zunächst gleich der doppelten Anzahl der Knotenpunkte, also $2k$. Da aber die drei Gleichungen (8), welche die Unbekannten σ_{ba} nicht mehr enthalten, eine Folge der Gleichungen (9) sind, sind die letzteren nicht alle unabhängig voneinander, vielmehr lassen sich drei unter ihnen aus den übrigen herleiten, und diese drei Gleichungen können wir weglassen, da sie in Rücksicht auf die Beziehungen (8) von selbst erfüllt sind, wenn die übrigen befriedigt werden. Wir wählen dafür die zwei Gleichungen für den Knotenpunkt 1 und die erste Gleichung für den Knotenpunkt 2. Die übrigen $2k - 3$ Gleichungen dienen dann dazu, die s Werte σ_{ba} zu bestimmen, und daher muß wieder

$$(11) \qquad s = 2k - 3$$

sein.

Diese Bedingung allein ist aber nicht hinreichend, um die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Lösung erkennen zu lassen. Nach dem, was wir bereits früher gesehen haben, ist hierzu noch erforderlich, daß, wenn man aus den s Gleichungen $s - 1$ der Unbekannten eliminiert, auf der linken Seite nicht auch noch der resultierende Koeffizient der letzten Unbekannten verschwindet. Dies aber ist auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die s homogenen Gleichungen

$$(12) \qquad \sum \sigma_{ba}(x_b - x_a) = 0, \quad \sum \sigma_{ba}(y_b - y_a) = 0$$

nicht anders erfüllt werden können, als indem man alle $\sigma_{ba} = 0$ setzt. Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit unbestimmten Koeffizienten $\eta_2, \xi_3, \eta_3, \ldots \xi_k, \eta_k$ und addieren sie, so können wir wegen $\sigma_{ba} = \sigma_{ab}$ das Resultat in folgender Form schreiben

$$(13) \qquad \sum_{a,b} \sigma_{ab}[(x_b - x_a)(\xi_b - \xi_a) + (y_b - y_a)(\eta_b - \eta_a)] = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung den Inhalt der eckigen Klammer generell gleich 0, so kommen wir auf die Gleichungen, zu denen uns das Problem der kinematischen Bestimmtheit führte,

zurück. Es ist nun sofort zu sehen, daß, wenn das Fachwerk nicht kinematisch bestimmt ist, es auch nicht statisch bestimmt sein, d. h. keine eindeutige Lösung des Spannungsproblems liefern kann. In der Tat erkannten wir als die Bedingung der kinematischen Unbestimmtheit, daß die s Gleichungen (3), mit gewissen Faktoren, die wir durch σ_{ab} bezeichnen können, multipliziert und addiert, ein identisch verschwindendes Resultat liefern. Dann aber ist die vorstehende Gleichung für diese Werte der σ_{ab}, die nicht alle verschwinden können, hinsichtlich der $\xi_a, \eta_a, \ldots$ identisch erfüllt, und mithin sind auch die vorhergehenden Gleichungen (12) erfüllt, ohne daß alle σ_{ab} verschwinden, das Fachwerk ist sonach auch statisch unbestimmt. Umgekehrt ist jedes statisch unbestimmte Fachwerk, da sich dieselbe Schlußweise auch rückwärts ausführen läßt, gleichzeitig kinematisch unbestimmt, und daraus folgt, daß auch jedes kinematisch bestimmte Fachwerk zugleich statisch bestimmt sein muß. Deswegen bezeichnet Föppl solche Fachwerke kurz als bestimmte Fachwerke. Schur nennt sie einfache Fachwerke.

Wir wollen nun den Begriff des Fachwerkes noch enger umgrenzen, indem wir ein schlicht gebautes Fachwerk dadurch definieren, daß sich die in ihm vorkommenden Stäbe als die Umrandungen einer Reihe von Polygonen auffassen lassen, welche einen Teil der Ebene einfach und einfach zusammenhängend, d. h. ohne im Inneren eine Lücke zu lassen, überdecken. Es folgt dann sofort, daß in einem solchen Fachwerk ein Stab höchstens zweien der Polygone oder Fächer angehören kann, denn sonst müßte wenigstens auf der einen Seite von ihm eine doppelte Überdeckung stattfinden. Die Stäbe, die nur einem Fache angehören, bilden den Rand des Fachwerkes, und wir unterscheiden auf diese Weise wieder Rand- und Diagonalstäbe. Der Rand des Fachwerkes ist ein Polygon, dessen Ecken wir als die äußeren Knotenpunkte des Fachwerkes von den übrigen, inneren Knotenpunkten scheiden wollen.

Wir machen ferner die weitere Voraussetzung, daß alle äußeren Kräfte in den äußeren Knotenpunkten des Fachwerkes angreifen. Dann wollen wir das Fachwerk ein schlicht belastetes nennen. Ein Fachwerk, das schlicht gebaut und schlicht belastet ist, soll kurzweg als ein schlichtes Fachwerk bezeichnet werden.

Gehen durch einen inneren Knotenpunkt I eines solchen Fachwerkes vier Stäbe mit paarweise entgegengesetzt gleichen

Richtungen, so müssen auch die zugehörigen Spannungskräfte, damit Gleichgewicht besteht, wie leicht nachzuweisen ist, paarweise entgegengesetzt gleich werden. Sie zerstören sich also unmittelbar und lassen in den anderen Endpunkten der in eine gerade Linie fallenden beiden Stäbe wieder zwei entgegengesetzt gleiche Spannungskräfte übrig. Diese beiden Stäbe kann man sonach als einen einzigen Stab ansehen und ebenso die beiden anderen Stäbe, also den inneren Knotenpunkt I als solchen wegfallen lassen und ihn als einen Überschneidungspunkt ansehen. Solche einfache Überschneidungen könnten demnach zu Anfang vorhanden sein. Man würde sie, um eine einfache Überdeckung der Ebene durch die Fächer des Fachwerkes zu erreichen, durch einen Knotenpunkt der vorerwähnten Art zu ersetzen haben.

Ebenso kann man, wenn eine äußere Kraft in einem inneren Knotenpunkte angreift, doch so, daß ihre Wirkungslinie keinen zweiten Knotenpunkt des Fachwerkes enthält, jeden Punkt, in dem diese Wirkungslinie einen Stab des Fachwerkes schneidet, als einen neuen Knotenpunkt des Fachwerkes einführen und in ihm zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, von denen die eine die Größe und Richtung der äußeren Kraft hat, anbringen. Die letzte dieser Kräfte, die in einem Punkte auf dem Rande des Fachwerkes angreift, sehen wir als die neue äußere Kraft an, während wir die übrig bleibenden Kräfte paarweise als Spannungskräfte in neu einzufügenden Stäben, die alle in die Wirkungslinie der ursprünglichen äußeren Kraft fallen, deuten. In jedem der durch die neuen Knotenpunkte abgeteilten Stäbe sind an diesen Knotenpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Größe der ursprünglichen Spannungskräfte des Stabes einzufügen, damit auch in den Teilen des Stabes die Spannungskräfte zu Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte auftreten.

Durch dieses Verfahren ist es möglich, die scheinbar stark einschränkenden Voraussetzungen des schlichten Fachwerkes viel weiter auszudehnen und einen sehr allgemeinen Typus von Fachwerken unter ihnen zu begreifen.

Das Spannungsproblem kann man allgemein in der Weise behandeln, daß man die Bestimmung der Spannungen in einem bestimmten Fachwerke mit k Knotenpunkten auf das gleiche Problem für ein Fachwerk mit $k - 1$ Knotenpunkten zurückführt. Für ein Fachwerk mit der geringsten Zahl, nämlich 3 Knotenpunkten, d. h. für ein einfaches Dreieck, ist die Spannungsbestimmung

sicher möglich. Weist man also nach, daß das Spannungsproblem für jedes Fachwerk mit k Knotenpunkten lösbar ist, wenn es für jedes Fachwerk mit $k-1$ Knotenpunkten gelöst werden kann, so ist die Lösbarkeit des Problems allgemein nachgewiesen, denn für 3 Knotenpunkte ist es lösbar, also auch für 4, mithin weiter für 5 usf.

Die Reduktion von k auf $k-1$ geschieht in der Weise, daß man zunächst den Fall abscheidet, wo in dem Fachwerk ein Knotenpunkt A_m vorkommt, durch den nur zwei Stäbe gehen. Dann sind die Spannungen in diesen Stäben, die wir schon früher benutzt haben, sofort zu finden. Führen wir nun die Spannungskräfte ein, die in den beiden Stäben an ihren zweiten Endpunkten A_p, A_q angreifen, so kann man den Knotenpunkt A_m, da die drei an ihm angreifenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, ganz weglassen, die an A_p und A_q angreifenden Kräfte zu je einer Resultierenden vereinigen, und behält ein bestimmtes Fachwerk mit $k-1$ Knotenpunkten und gegebenen äußeren Kräften übrig, womit die verlangte Reduktion ausgeführt ist.

Enthält das Fachwerk mit k Knoten aber keinen einzigen Knotenpunkt, durch den nur zwei Stäbe gehen, so enthält es sicher einen Knotenpunkt, durch den drei Stäbe gehen. Denn gingen durch jeden Knotenpunkt vier Stäbe, so wäre die Zahl s der Stäbe die Hälfte von $4k$, also $2k$, während sie, wie wir sahen, $2k-3$ sein muß.

Wir nehmen also einen Knotenpunkt A_m, durch den nur drei Stäbe gehen, und nennen A_p, A_q, A_r die anderen Endpunkte dieser Stäbe. Dann sind wenigstens zwei der letzteren drei Punkte miteinander nicht durch einen Stab verbunden, denn wären sie es alle, so könnte von den drei Stäben durch A_m einer weggelassen werden, ohne die kinematische Bestimmtheit des Fachwerks zu stören, da ein Punkt immer fest ist, wenn er mit zwei festen Punkten fest verbunden ist. Läßt man demnach einen der drei Stäbe durch A_m weg, so müssen wenigstens zwei der Punkte A_p, A_p, A_r gegeneinander verschiebbar werden, denn wären sie alle in ihrer gegenseitigen Lage fest, so genügte es, A_m mit zweien von ihnen zu verbinden. Es können aber auch nicht mehr als zwei der drei Punkte, etwa A_p und A_q, in ihrer gegenseitigen Entfernung veränderlich sein, denn wären die Entfernungen eines der drei Punkte von den beiden übrigen veränderlich, so bliebe eine Verschieblichkeit bestehen, auch wenn

die drei Punkte mit A_m fest verbunden würden. Fügen wir nun den Stab $A_p A_q$ ein, so können wir den Stab $A_r A_m$ fortlassen, ohne die statische Bestimmtheit des Fachwerkes zu stören. Es läßt sich also immer durch Fortnehmen eines Stabes und Hinzufügung eines andern ein bestimmtes Fachwerk in ein andres verwandeln, in dem durch mindestens einen Knotenpunkt nur zwei Stäbe gehen.

Z. B. wird das in der beistehenden Figur gezeichnete Fachwerk, bei dem durch jeden Knotenpunkt drei Stäbe gehen, durch Fortnahme des Stabes r und Hinzufügung des Stabes s in ein gewöhnliches Dreiecksfachwerk verwandelt, bei dem durch die Knotenpunkte A und B nur zwei Stäbe gehen. Läßt man diese beiden Stäbe z. B. bei B weg, so bleibt ein bestimmtes Fachwerk mit $k-1$ Knotenpunkten übrig.

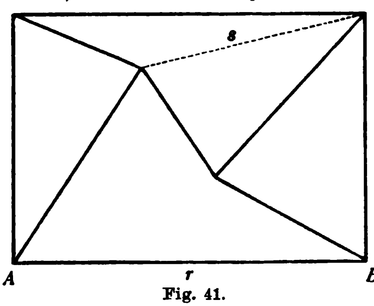


Fig. 41.

Fügt man dem ursprünglichen Fachwerk den neuen Stab hinzu, ohne den alten fortzunehmen, so hat man ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit einem Grade der Unbestimmtheit vor sich. Wir behandeln dieses Fachwerk so, daß wir zunächst in den Stäben $A_m A_p$, $A_m A_q$, $A_m A_r$ drei Spannungskräfte P, Q, R bestimmen, die in A_m der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind nicht eindeutig bestimmt; sind aber P_1, Q_1, R_1 und P_2, Q_2, R_2 zwei Wertekombinationen für sie, die der geforderten Bedingung genügen, so ist jede andere Wertekombination von der Form

$$P = \frac{P_1 + \lambda P_2}{1 + \lambda}, \quad Q = \frac{Q_1 + \lambda Q_2}{1 + \lambda}, \quad R = \frac{R_1 + \lambda R_2}{1 + \lambda},$$

wobei λ willkürlich bleibt. Sind nämlich $\varphi_p, \varphi_q, \varphi_r$ die Winkel, welche die Richtungen der Stäbe $A_m A_p$, $A_m A_q$, $A_m A_r$ mit der positiven x-Achse einschließen und X_m, Y_m die Komponenten der äußeren Kraft in A_m, so sind die zu erfüllenden Gleichungen für P, Q, R

$$P \cos \varphi_p + Q \cos \varphi_q + R \cos \varphi_r = X_m,$$

$$P \sin \varphi_p + Q \sin \varphi_q + R \sin \varphi_r = Y_m,$$

und aus zwei Lösungen P_1, Q_1, R_1 und P_2, Q_2, R_2 dieser Gleichungen setzt sich die allgemeine Lösung in der angegebenen Weise zusammen. Fügt man die den Kräften P, Q, R entgegengesetzt gleichen Kräften in den Punkten A_p, A_q, A_r hinzu und läßt die drei Stäbe durch A_m weg, so läßt sich in dem statisch bestimmten Fachwerke mit $k - 1$ Knotenpunkten, das so entsteht, die Spannung nach Voraussetzung in jedem Stabe ermitteln. Insbesondere möge die eine der Spannungskräfte in dem Stabe $A_p A_q$ S sein. Dann ist dies S von der Form

$$S = \frac{S_1 + \lambda S_2}{1 + \lambda},$$

wo S_1 die Spannung, die sich für die Kräfte P_1, Q_1, R_1 ergibt, und S_2 die analoge Spannung für P_2, Q_2, R_2 ist. Macht man nun, wenn nicht schon S_1 oder S_2 gleich null wird,

$$\lambda = - S_1 : S_2,$$

so wird diese Spannung 0, der Stab $A_p A_q$ kann wieder weggelassen werden, und es ergibt sich ein Spannungszustand in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke mit k Knotenpunkten, der den gegebenen äußeren Kräften entspricht, womit das Problem gelöst ist.

Diese Betrachtung zeigt auch, daß die Zahl der Fächer immer um 1 vermindert wird, wenn man die Zahl der Knotenpunkte um 1 herabsetzt. Denn nimmt man einen Knotenpunkt fort, durch den nur zwei Stäbe gehen, so ist dies unmittelbar einleuchtend. Gehen durch den Knotenpunkt aber drei Stäbe, so werden durch seine Fortnahme zwei Fächer entfernt, aber durch den neu einzusetzenden Stab wieder ein Fach hinzugefügt, die Behauptung ist also auch dann richtig. Da ein Fachwerk mit drei Knotenpunkten aber nur ein Fach besitzt, so ist die Zahl n der Fächer allgemein

$$n = k - 2, \tag{14}$$

woraus auch

$$k = n + 2, \; s = 2n + 1 \tag{15}$$

folgt.

Das Spannungsproblem ist bestimmt durch das vorgelegte Fachwerk und die gegebenen äußeren Kräfte. Diese äußeren Kräfte können in einem Kräfteplan gegeben werden, aus dem sie ihrer Größe und Richtung nach hervorgehen. Man kann sie aber auch bis auf einen gemeinsamen Faktor, der als die willkürlich

bleibende Krafteinheit gedeutet werden kann, in dem Lageplan selbst festlegen, indem man ihre Wirkungslinien gibt und für sie ein Seileck konstruiert. Man fügt dann in jeder Ecke dieses Seileckes eine der betreffenden äußeren Kraft direkt und eine ihr entgegengesetzt gleiche Kraft hinzu und in den angrenzenden Seileckseiten zwei Kräfte, die der ersten hinzugefügten Kraft das Gleichgewicht halten, während die übrig bleibenden zwei entgegengesetzt gleichen Kräfte in der Wirkungslinie der äußeren Kraft sich unmittelbar das Gleichgewicht halten. So wird das bestehende Gleichgewicht nicht gestört, in den Seileckseiten und ebenso in den Wirkungslinien der äußeren Kräfte wirken jetzt Paare entgegengesetzt gleicher Kräfte, es lassen sich demnach überhaupt alle Kräfte, die auftreten, nunmehr zu Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte zusammenfassen, die jedesmal in eine geradlinige Strecke fallen und an deren Endpunkten angreifen. Diese Strecke ist entweder ein Stab des Fachwerkes, oder sie verbindet einen äußeren Knotenpunkt mit einer Ecke des Seileckes, dann wollen wir sie einen Kraftstab nennen, oder endlich sie ist eine Seite des Seilecks, die wir auch als einen Seilstab bezeichnen können. Von dem Fachwerk wollen wir sagen, es sei in das Seileck eingespannt. Die ganze entstehende Figur heißt nach Schur das erweiterte Fachwerk. Eine Kraft in einem der Seilstäbe, oder auch in irgend einem andern Stabe der Figur, kann der Größe und dem Sinne nach beliebig angenommen werden, dadurch aber sind alle anderen Kräfte in eindeutiger Weise bestimmt. Es ist indes sofort zu sehen, daß, wenn überhaupt eine Figur, in deren Strecken lauter solche Paare von entgegengesetzt gleichen Spannungskräften wirken, kurz gesagt eine Spannungsfigur, möglich ist, das Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte bestehen bleibt, wenn alle Kräfte in demselben Verhältnisse vergrößert oder verringert werden. In dem ursprünglichen Fachwerk ist ein solcher Spannungszustand unmöglich, denn aus seiner statischen Bestimmtheit folgt, daß, wenn die äußeren Kräfte wegfallen, auch alle inneren Kräfte verschwinden müssen.

Durch das erweiterte Fachwerk werden dem ursprünglichen Fachwerke bestimmte Fächer hinzugefügt. Eines davon ist das Seileck selbst, das notwendigerweise geschlossen ist, da die äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind. Die übrigen hinzukommenden Fächer nennen wir die Randfächer. Jedes von ihnen wird, wenn das Seileck derart angelegt ist, daß in keiner Ecke von ihm sich

die Wirkungslinien mehrerer äußerer Kräfte begegnen, begrenzt von einer Seileckseite, den durch ihre Endpunkte gehenden Kraftstäben und dem zwischen den anderen Endpunkten dieser beiden Kraftstäbe liegenden Randstücke des ursprünglichen Fachwerkes. Ist $\varkappa$ die Zahl der Ecken (und Seiten) des Seilecks, so wird die Anzahl der Knotenpunkte in dem erweiterten Fachwerke

$$\mathfrak{k} = k + \varkappa.$$

Die Zahl der Kraftstäbe ist ebenfalls $\varkappa$, die Gesamtzahl der Stäbe in dem erweiterten Fachwerke also

$$\mathfrak{s} = s + 2\varkappa,$$

und da $s = 2k - 3$ war, ergibt sich auch

$$(16) \qquad \mathfrak{s} = 2\mathfrak{k} - 3.$$

Die Zahl der hinzugekommenen Fächer, das Seileck selbst einbegriffen, ist $\varkappa + 1$, also wird die Gesamtzahl der Fächer in dem erweiterten Fachwerk $\mathfrak{n} = n + \varkappa + 1$ oder, da $n = k - 2$,

$$(17) \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{k} - 1.$$

In dem erweiterten Fachwerk gehört ausnahmslos jeder Stab zwei und nur zwei aneinander grenzenden Fächern an. Daraus folgt zweierlei. Erstens ergibt sich, wenn wir die Fächer als Flächenstücke deuten, daß das ganze Fachwerk ein unendlich abgeplattetes geschlossenes Polyeder bildet, denn es besitzt keine Berandung, d. h. Stäbe, die nur einem Fache angehören, und von jedem Fache kann man in jedes andere Fach gelangen, ohne das Fachwerk zu verlassen. Die Polyederfläche, welche das Fachwerk bildet, ist auch einfach zusammenhängend, d. h. führt man in ihr irgend einen in sich zurücklaufenden Schnitt, so löst er ein Stück von der Fläche ab. Dies folgt daraus, daß das ursprüngliche Fachwerk nach Voraussetzung eine einfach zusammenhängende ebene Fläche war.

Zweitens zeigt sich aber, daß wir jeden Stab in eindeutiger Weise nicht bloß durch die Knotenpunkte, die er verbindet, sondern auch durch die Fächer, die in ihm aneinander grenzen, charakterisieren können. Bezeichnen wir also die $\mathfrak{n}$ Fächer des Fachwerkes durch die Zahlen 1 bis $\mathfrak{n}$, so können wir jeden Stab des Fachwerkes durch ein Symbol $(\alpha\beta)$ kennzeichnen, wo die Zahlen α, β sich auf die zwei längs des Stabes aneinander grenzenden Fächer beziehen.

Mit dem Stabe kann auch die Spannung in dem Stabe durch die Zahlen α, β charakterisiert werden. Um aber die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte, die diese Spannung darstellen, durch die angrenzenden Fächer eindeutig zu bezeichnen, müssen wir gleichzeitig auf die Reihenfolge, in der die Zahlen α, β erscheinen, Rücksicht nehmen und der einen Kraft die Folge $\alpha\beta$, der andern die Folge $\beta\alpha$ zuweisen. Die Regel, nach der diese Zuweisung geschieht, wollen wir so formulieren, daß beim Übergange vom Fache α zum Fache β der Knotenpunkt, in dem die durch die Folge $\alpha\beta$ bezeichnete Kraft angreift, zur Linken liegen soll. Die Komponenten dieser Kraft wollen wir $X_{(\alpha\beta)}$, $Y_{(\alpha\beta)}$ schreiben, und haben dann zu setzen

$$(18) \qquad X_{(\beta\alpha)} = -X_{(\alpha\beta)}, \quad Y_{(\beta\alpha)} = -Y_{(\alpha\beta)}.$$

Achtes Kapitel.

Der Kräfteplan eines ebenen bestimmten Fachwerkes.

Auf Grund der im vorstehenden getroffenen Festsetzungen wollen wir nun für das erweiterte Fachwerk den Kräfteplan herzuleiten suchen. Wir stellen zunächst die Gleichungen des Spannungsproblems in der veränderten Bezeichnungsweise auf. Zu dem Zwecke bezeichnen wir durch die Folge

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$$

die Indices der Fächer, die in dem Knotenpunkte mit dem Index a zusammenstoßen, diese Fächer in der Reihenfolge einer positiven Umkreisung des Knotenpunktes genommen. Dann werden die Gleichungen, welche das Gleichgewicht der in dem Punkte a angreifenden Spannungskräfte ausdrücken,

$$(1) \qquad \begin{cases} X_{(\alpha\beta)} + X_{(\beta\gamma)} + \cdots + X_{(\mu\nu)} + X_{(\nu\alpha)} = 0, \\ Y_{(\alpha\beta)} + Y_{(\beta\gamma)} + \cdots + Y_{(\mu\nu)} + Y_{(\nu\alpha)} = 0, \\ Z_{(\alpha\beta)} + Z_{(\beta\gamma)} + \cdots + Z_{(\mu\nu)} + Z_{(\nu\alpha)} = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(2) \qquad Z_{(\alpha\beta)} = Y_{(\alpha\beta)} x_a - X_{(\alpha\beta)} y_a,$$

indem x_a, y_a die Koordinaten des Punktes a bezeichnen. Die dritte der Gleichungen (1) entsteht also aus den beiden ersten,

indem man diese mit $-y_a$ und x_a multipliziert und zueinander addiert. Die Gleichungen (1) wollen wir in abgekürzter Form schreiben wie folgt

$$(1\,a) \qquad (X)_a = 0, \quad (Y)_a = 0, \quad (Z)_a = 0.$$

Wir denken uns jetzt in der Fläche des Fachwerkes einen Ringschnitt geführt. Dieser zerlegt die Fläche in zwei Teile $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Für alle Knotenpunkte des Teiles $\mathfrak{A}$ denken wir uns die Gleichungen (1) oder (1a) aufgestellt und diese Gleichungssysteme addiert. So gelangen wir zu dem neuen Gleichungssystem

$$(3) \qquad \sum_{\mathfrak{A}}(X)_a = 0, \quad \sum_{\mathfrak{A}}(Y)_a = 0, \quad \sum_{\mathfrak{A}}(Z)_a = 0,$$

dessen Bedeutung wir näher untersuchen wollen. Zu dem Zwecke wollen wir den ausgeführten Ringschnitt näher bezeichnen durch die Angabe der Fächer, die er durchsetzt. Es seien die Indices dieser Fächer, in der Reihenfolge einer positiven Umkreisung des Stückes $\mathfrak{A}$ genommen,

$$\varrho, \sigma, \tau \ldots \varphi, \chi, \varrho.$$

Der Schnitt trifft alle Stäbe, in denen je zwei aufeinanderfolgende dieser Fächer aneinander grenzen, und es ist leicht zu sehen, daß bei Ausführung der Summen in (3) nur die Glieder übrig bleiben, die sich auf die Kräfte in den durchschnittenen Stäben beziehen. Denn sei $(\alpha\beta)$ ein Stab, der ganz dem Teil $\mathfrak{A}$ angehört, so enthalten die Summen sowohl die Kraftkoordinaten

$$X_{(\alpha\beta)}, \; Y_{(\alpha\beta)}, \; Z_{(\alpha\beta)}$$

als auch die Kraftkoordinaten

$$X_{(\beta\alpha)} = -X_{(\alpha\beta)}, \quad Y_{(\beta\alpha)} = -Y_{(\alpha\beta)}, \quad Z_{(\beta\alpha)} = -Z_{(\alpha\beta)},$$

diese Paare entgegengesetzt gleicher Werte zerstören sich also, und es bleiben in der Tat nur die Kräfte, die in den durchschnittenen Stäben wirken und deshalb nicht durch eine entgegengesetzt gleiche Kraft im anderen Endpunkte des Stabes kompensiert werden, übrig. Auf diese Weise verwandeln sich aber die Gleichungen (3) in die folgenden

$$(4) \qquad \begin{cases} X_{(\varrho\sigma)} + X_{(\sigma\tau)} + \cdots + X_{(\varphi\chi)} + X_{(\chi\varrho)} = 0, \\ Y_{(\varrho\sigma)} + Y_{(\sigma\tau)} + \cdots + Y_{(\varphi\chi)} + Y_{(\chi\varrho)} = 0, \\ Z_{(\varrho\sigma)} + Z_{(\sigma\tau)} + \cdots + Z_{(\varphi\chi)} + Z_{(\chi\varrho)} = 0, \end{cases}$$

und hier ist im allgemeinen nicht mehr die dritte Gleichung eine Folge der beiden ersten.

Wir wollen jetzt den Zyklus der Fächer $\varrho, \sigma, \tau \ldots$ insbesondere so wählen, daß er ein fest angenommenes Fach ω enthält, und schreiben ihn dann wie folgt

$$\omega, \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda, \varkappa', \ldots \beta', \alpha', \omega.$$

Ferner berücksichtigen wir, daß

$$\begin{array}{lll} X_{(\alpha'\omega)} = -X_{(\omega\alpha')}, & Y_{(\alpha'\omega)} = -Y_{(\omega\alpha')}, & Z_{(\alpha'\omega)} = -Z_{(\omega\alpha')}, \\ X_{(\beta'\alpha')} = -X_{(\alpha'\beta')}, & Y_{(\beta'\alpha')} = -Y_{(\alpha'\beta')}, & Z_{(\beta'\alpha')} = -Z_{(\alpha'\beta')}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

und finden so aus (4) die folgenden Gleichungen

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{(\omega\alpha)} + X_{(\alpha\beta)} + \cdots + X_{(\varkappa\lambda)} = X_{(\omega\alpha')} + X_{(\alpha'\beta')} + \cdots + X_{(\varkappa'\lambda)}, \\ Y_{(\omega\alpha)} + Y_{(\alpha\beta)} + \cdots + Y_{(\varkappa\lambda)} = Y_{(\omega\alpha')} + Y_{(\alpha'\beta')} + \cdots + Y_{(\varkappa'\lambda)}, \\ Z_{(\omega\alpha)} + Z_{(\alpha\beta)} + \cdots + Z_{(\varkappa\lambda)} = Z_{(\omega\alpha')} + Z_{(\alpha'\beta')} + \cdots + Z_{(\varkappa'\lambda)}, \end{array} \right.$$

Die Indicesfolgen

$$\omega, \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda \quad \text{und} \quad \omega, \alpha', \beta', \ldots \varkappa', \lambda$$

bezeichnen aber zwei verschiedene Wege, die beide aus dem fest gewählten Anfangsfach ω in das beliebig angenommene Fach λ führen. Die Gleichungen (5) drücken demnach aus, daß die in ihnen vorkommenden Summen nur abhängen von dem Anfangs- und Endfach, nicht aber von dem Wege, längs dem sie genommen werden.

Die Summen beziehen sich, wie man sieht, auf die Spannungskräfte, die in den von dem Wege getroffenen Stäben in dem zur linken Hand gelegenen Knotenpunkte wirken. Diese Summen wollen wir nun einfacher bezeichnen, indem wir setzen

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_\omega = X_{(\omega\alpha)} + X_{(\alpha\beta)} + \cdots + X_{(\varkappa\lambda)}, \\ \mathfrak{Y}_\lambda - \mathfrak{Y}_\omega = Y_{(\omega\alpha)} + Y_{(\alpha\beta)} + \cdots + Y_{(\varkappa\lambda)}, \\ \mathfrak{Z}_\lambda - \mathfrak{Z}_\omega = Z_{(\omega\alpha)} + Z_{(\alpha\beta)} + \cdots + Z_{(\varkappa\lambda)}. \end{array} \right.$$

Dann dürfen wir nach dem Gesagten $\mathfrak{X}_\lambda$, $\mathfrak{Y}_\lambda$, $\mathfrak{Z}_\lambda$ als allein abhängig von dem Fache λ, $\mathfrak{X}_\omega$, $\mathfrak{Y}_\omega$, $\mathfrak{Z}_\omega$ analog als eine Funktion des Faches ω ansehen, während die Wahl der Fächerfolge

$$\omega, \alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda$$

auf diese Werte ohne Einfluß ist. Es ist also jetzt jedem Fache λ des Fachwerkes ein Wertetripel

$$\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$$

zugeordnet, und, was wir zunächst zu zeigen haben, ist, wie man aus diesen Wertetripeln die Koordinaten aller Spannungskräfte herleiten kann.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit μ ein dem Fache λ benachbartes Fach. Dann dürfen wir den Weg, der aus dem Anfangsfach ω in das Fach μ führt, durch das Fach λ hindurchgehen lassen und können demgemäß setzen

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_\mu - \mathfrak{X}_\omega = X_{(\omega\alpha)} + X_{(\alpha\beta)} + \cdots + X_{(\varkappa\lambda)} + X_{(\lambda\mu)}, \\ \mathfrak{Y}_\mu - \mathfrak{Y}_\omega = Y_{(\omega\alpha)} + Y_{(\alpha\beta)} + \cdots + Y_{(\varkappa\lambda)} + Y_{(\lambda\mu)}, \\ \mathfrak{Z}_\mu - \mathfrak{Z}_\omega = Z_{(\omega\alpha)} + Z_{(\alpha\beta)} + \cdots + Z_{(\varkappa\lambda)} + Z_{(\lambda\mu)}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (6) folgt durch Subtraktion

$$(8)\qquad \begin{cases} X_{(\lambda\mu)} = \mathfrak{X}_\mu - \mathfrak{X}_\lambda, \\ Y_{(\lambda\mu)} = \mathfrak{Y}_\mu - \mathfrak{Y}_\lambda, \\ Z_{(\lambda\mu)} = \mathfrak{Z}_\mu - \mathfrak{Z}_\lambda. \end{cases}$$

Aus den so gefundenen Gleichungen ergibt sich aber sofort die Konstruktion des Kräfteplans, denn wir haben nur $(\mathfrak{X}_\omega, \mathfrak{Y}_\omega)$, $(\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda)$, $(\mathfrak{X}_\mu, \mathfrak{Y}_\mu)$ usw. jedesmal als die Koordinaten eines Punktes in der Ebene des Fachwerkes aufzufassen, und zwar in demselben Koordinatensystem, auf das wir auch die Punkte des Fachwerks bezogen haben oder in einem parallel verschobenen Koordinatensystem, dann stellt die Verbindungsstrecke der Punkte C_λ und C_μ mit den Koordinaten $(\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda)$ und $(\mathfrak{X}_\mu, \mathfrak{Y}_\mu)$ die Kräfte in dem Stabe $(\lambda\mu)$ der Größe und Richtung nach dar. Die eingetragenen Punkte samt den gehörigen Verbindungslinien bilden also den gesuchten Kräfteplan.

Wir wollen noch einmal hervorheben, daß die Punkte des Kräfteplans den Fächern des Fachwerks entsprechen, und immer solche zwei Punkte des Kräfteplans zu verbinden sind, die zwei in einem Stabe aneinandergrenzenden Fächern des Fachwerks zugeordnet sind.

Nun deuten wir auch noch die Werte $\mathfrak{Z}_\lambda$ als Ordinaten in den Punkten C_λ des Kräfteplans und erhalten dann durch die

Endpunkte $\mathfrak{C}_\lambda$ dieser Ordinaten eine Raumfigur über der Ebene des Kräfteplans, von welcher der letztere die orthogonale Projektion ist. Es ist aber wichtig, zu beachten, daß die Raumfigur bis auf die Ordinate eines einzigen Punktes durch den ebenen Kräfteplan vollständig bestimmt ist, wenn man das Fachwerk als von vornherein gegeben ansieht.

Sind nämlich λ, μ wie oben die Indices zweier benachbarten Fächer und sind x_a, y_a die Koordinaten des einen Endpunktes ihres gemeinsamen Stabes, so wird

$$Z_{(\lambda\mu)} = Y_{(\lambda\mu)} x_a - X_{(\lambda\mu)} y_a .$$

Aus (8) folgt dann

$$\mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_\lambda + (\mathfrak{Y}_\mu - \mathfrak{Y}_\lambda) x_a - (\mathfrak{X}_\mu - \mathfrak{X}_\lambda) y_a , \tag{9}$$

und auf diese Weise fortschreitend kann man aus der Ordinate eines Punktes der Raumfigur die Ordinaten aller anderen Punkte finden.

Wir wollen nun auch über dem Fachwerke eine Raumfigur bestimmen, die aus der Raumfigur des Kräfteplans in folgender Weise hervorgeht. Schreiben wir die soeben gefundene Gleichung (9) in der Form

$$\mathfrak{Z}_\mu - \mathfrak{Y}_\mu x_a + \mathfrak{X}_\mu y_a = \mathfrak{Z}_\lambda - \mathfrak{Y}_\lambda x_a + \mathfrak{X}_\lambda y_a ,$$

so zeigt sie, daß der Ausdruck

$$z_a = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Y} x_a + \mathfrak{X} y_a \tag{10}$$

denselben Wert annimmt, auf welches von den an den Knotenpunkt a stoßenden Fächern sich auch die Werte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ beziehen mögen. Die Zahl z_a ist derart dem Knotenpunkte a eindeutig zugeordnet und soll in diesem Punkte als eine Ordinate auf der Grundebene errichtet werden. Die Punkte $\mathfrak{A}_a$, die wir im Raume als Endpunkte der so bestimmten Ordinaten erhalten, liefern zusammen mit denjenigen Verbindungsstrecken, die über den Stäben des Fachwerks liegen, die Raumfigur des Fachwerks.

Dabei bilden diejenigen Verbindungsstrecken, die über den ein Fach des Fachwerkes begrenzenden Stäben liegen, jedesmal die Berandung eines ebenen Polygons. Ist nämlich λ der Index des Faches, so genügen die Koordinaten x, y, z des Raumpunktes über irgend einer Ecke dieses Faches der Gleichung

$$z = \mathfrak{Z}_\lambda - \mathfrak{Y}_\lambda x + \mathfrak{X}_\lambda y , \tag{11}$$

d. h. das ganze Polygon, von dem diese Raumpunkte die Ecken bilden, ist in der durch die vorstehende Gleichung dargestellten Ebene γ_λ enthalten. Die Ebene γ_λ ist aber zufolge der Form ihrer Gleichung, wenn wir uns die Koordinaten x, y, z und $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ auf dasselbe Koordinatensystem bezogen denken, die Nullebene des dem Fache zugeordneten Punktes $\mathfrak{C}_\lambda$ in einem Nullsysteme, dessen Parameter $k = 1$ und dessen Achse zur Grundebene senkrecht (nämlich die z-Achse) ist.

Umgekehrt ist durch die Gleichung (10), wenn wir in ihr $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ als laufende Punktkoordinaten deuten, einem der Punkte über den Knotenpunkten des Fachwerkes in dem Nullsystem als Nullebene eine Ebene α_a zugeordnet; in dieser liegen die Punkte, die allen an den betreffenden Knotenpunkt stoßenden Fächern in der Raumfigur des Kräfteplans entsprechen. Diese Punkte bilden sonach wieder die Ecken eines ebenen Polygons, dessen Seiten den an den Knotenpunkt stoßenden Stäben des Fachwerkes korrespondieren.

Wie wir also sehen, besteht sowohl die Raumfigur über dem erweiterten Fachwerk als auch die Raumfigur über dem Kräfteplan aus den Ecken und Kanten eines geschlossenen Polyeders. Das erste Polyeder nennen wir kurz das Fachpolyeder, das zweite das Kräftepolyeder.

Fachpolyeder und Kräftepolyeder bilden zwei reziproke Figuren des Nullsystems. Den Kanten des einen sind die Kanten des anderen als reziproke Polaren des Nullsystems zugeordnet. Die Ecken des einen Polyeders sind die Nullpunkte von den begrenzenden Ebenen des anderen und liegen sonach in diesen Ebenen. Da dies wechselseitig gilt, so sind die beiden Polyeder einander gleichzeitig ein- und umschrieben, d. h. die Ecken des einen liegen in den Ebenen des anderen, und die Ebenen des ersten gehen durch die Ecken des zweiten hindurch.

Die Gleichung (10) gibt den Ordinaten z_a in den Knotenpunkten des Fachwerkes eine bestimmte statische Bedeutung. Es ist aber sofort zu sehen, daß auch jedes gleichgebaute Polyeder, von dem das Fachwerk die orthogonale Projektion bildet, vermöge des Nullsystems zu einem Kräfteplan führt. Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir mit (x_a, y_a), (x_b, y_b) die Koordinaten der Endpunkte eines Stabes, mit z_a', z_b' die zugehörigen Ordinaten, endlich

mit α, β die Indices der beiden Fächer, die in diesem Stabe aneinander grenzen. Dann müssen die Koordinaten der Punkte $\mathfrak{A}_a'$, $\mathfrak{A}_b'$ über den beiden Knotenpunkten erstlich der Gleichung der Ebene γ_α' genügen, welcher die über dem Fache α liegende Seitenfläche des Polyeders angehört. So finden wir, wenn $\mathfrak{X}_\alpha'$, $\mathfrak{Y}_\alpha'$, $\mathfrak{Z}_\alpha'$ die Koordinaten des Nullpunktes von γ_α' sind, zwei Gleichungen

$$\mathfrak{Z}_\alpha' - \mathfrak{Y}_\alpha' x_a + \mathfrak{X}_\alpha' y_a = z_a', \quad \mathfrak{Z}_\alpha' - \mathfrak{Y}_\alpha' x_b + \mathfrak{X}_\alpha' y_b = z_b'.$$

Aus dem gleichen Grunde bestehen aber auch, wenn wir statt des Faches α das Fach β nehmen, zwei Gleichungen

$$\mathfrak{Z}_\beta' - \mathfrak{Y}_\beta' x_a + \mathfrak{X}_\beta' y_a = z_a', \quad \mathfrak{Z}_\beta' - \mathfrak{Y}_\beta' x_b + \mathfrak{X}_\beta' y_b = z_b'.$$

Aus diesen beiden Gleichungspaaren folgt die Relation

$$(12) \qquad (\mathfrak{X}_\beta' - \mathfrak{X}_\alpha') : (\mathfrak{Y}_\beta' - \mathfrak{Y}_\alpha') = (x_b - x_a) : (y_b - y_a),$$

deren Bedeutung die folgende ist:

Dem Fachpolyeder ist in dem Nullsystem ein reziprokes Polyeder zugeordnet. Projizieren wir dessen Kanten auf die Grundebene, so sind sie nach der gefundenen Gleichung (12) jedesmal dem zugehörigen Stabe des Fachwerkes parallel. Den Stäben des Fachwerkes, die von einem Knotenpunkte ausgehen, entsprechen aber an dem reziproken Polyeder die Kanten, die eine Seitenfläche dieses Polyeders begrenzen und auch in der Projektion wieder ein geschlossenes Polygon bilden. Die Projektionsfigur hat also alle Eigenschaften eines Kräfteplans: Deuten wir ihre Strecken als Kräfte, so wirken diese Kräfte in den Richtungen der Fachwerkstäbe, und die Kraftstrecken, die zu den durch einen Knotenpunkt gehenden Stäben gehören, schließen sich zu einem Polygon, was jedesmal bedeutet, daß an dem Knotenpunkt Gleichgewicht besteht. Schließlich kommt auch jede Kraftstrecke doppelt vor, als Repräsentantin der zwei in einem Stabe wirkenden, entgegengesetzt gleichen Spannungskräfte. In der Tat läßt sich jeder Seitenfläche des Kräftepolyeders ein bestimmter Umlaufsinn geben, z. B. der Sinn einer positiven Umkreisung der nach dem Innern des Polyeders gerichteten Normalen auf der Seitenfläche. Dabei wird jede Kante des Polyeders entsprechend den zwei Seitenflächen, denen sie angehört, zweimal, in entgegengesetztem Sinne, durchlaufen, und gleiches gilt also

auch für ihre Projektion, die Kraftstrecke im Kräfteplan, die demnach zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte darstellt.

Nun wissen wir aber, daß der Kräfteplan des erweiterten Fachwerkes bis auf eine gleichzeitige Änderung der Größe aller Kräfte in demselben Verhältnis, d. h. bis auf eine Ähnlichkeitstransformation, bei der alle Richtungen erhalten bleiben, durch das Fachwerk selbst bestimmt ist. Nennen wir also $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Koordinaten der Eckpunkte in dem ursprünglichen Kräfteplan, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ die entsprechenden Koordinaten in dem neuen Kräfteplan, so muß eine Relation von folgender Form bestehen

$$(13) \qquad \mathfrak{X}' = m\mathfrak{X} + a, \quad \mathfrak{Y}' = m\mathfrak{Y} + b;$$

m ist hierbei das Verhältnis, in dem die Kräfte geändert werden, a, b bedeuten die Komponenten einer Parallelverschiebung, welcher der Kräfteplan, da seine absolute Lage ja nicht feststeht, auch noch unterworfen werden kann. Wirklich ergibt sich dann sofort, wenn wir den Gleichungen (8) entsprechend

$$X'_{(\lambda\mu)} = \mathfrak{X}'_\mu - \mathfrak{X}'_\lambda, \quad Y'_{(\lambda\mu)} = \mathfrak{Y}'_\mu - \mathfrak{Y}'_\lambda$$

setzen,

$$X'_{(\lambda\mu)} = mX_{(\lambda\mu)}, \quad Y'_{(\lambda\mu)} = mY_{(\lambda\mu)}.$$

Die Spannungen ändern sich also in der Tat unter der Voraussetzung der Gleichungen (13) alle nur um einen konstanten Faktor m.

Der Gleichung (9) entsprechend haben wir aber weiter

$$\mathfrak{Z}'_\mu - \mathfrak{Z}'_\lambda = (\mathfrak{Y}'_\mu - \mathfrak{Y}'_\lambda)x_a - (\mathfrak{X}'_\mu - \mathfrak{X}'_\lambda)y_a,$$

oder mit Rücksicht auf (13)

$$\mathfrak{Z}'_\mu - \mathfrak{Z}'_\lambda = m(\mathfrak{Z}_\mu - \mathfrak{Z}_\lambda),$$

das heißt

$$\mathfrak{Z}_\mu' - m\mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_\lambda' - m\mathfrak{Z}_\lambda = c,$$

wenn c eine neue Konstante bezeichnet. So ergibt sich, daß wir auch allgemein

$$(13\text{a}) \qquad \mathfrak{Z}' = m\mathfrak{Z} + c$$

zu setzen haben, wenn $\mathfrak{Z}'$ die zu $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ gehörende Ordinate bedeutet.

Die Raumfigur des neuen Kräfteplans, d. h. das zu der neuen Raumfigur des Fachwerks reziproke Polyeder geht sonach aus

dem ursprünglichen Kräftepolyeder hervor durch die Ähnlichkeitstransformation des Raumes, welche die Gleichungen (13) und (13a) zusammengenommen darstellen.

Nun haben wir aber für die Ordinaten über dem Fachwerk die allgemeinen Ausdrücke

$$z = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Y}x + \mathfrak{X}y \quad \text{und} \quad z' = \mathfrak{Z}' - \mathfrak{Y}'x + \mathfrak{X}'y,$$

und setzen wir in den zweiten die Werte (13) und (13a) ein, so ergibt sich

$$z' = m(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Y}x + \mathfrak{X}y) + ay - bx + c,$$

oder

$$z' = mz + ay - bx + c. \tag{14}$$

Diese Gleichung zeigt, wie man unmittelbar aus dem ursprünglichen Fachpolyeder das neue Polyeder erhält.

Die durch die Gleichung (14) dargestellte lineare Transformation des Raumes ist aber eine perspektive Affinität, d. h. es hat zunächst die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ eine feste Richtung. In der Tat liegen zwei solche Punkte immer auf einem Lot a der Grundebene. Weiter aber läßt sich eine Ebene α bestimmen derart, daß, wenn $\mathfrak{A}_0$ ihr Schnittpunkt mit der vertikalen Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ ist, das Verhältnis

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = m$$

wird, also einen für alle Paare entsprechender Punkte gleichbleibenden Wert annimmt. Diese Ebene α muß die Eigenschaft haben, daß ihre Punkte sich selbst entsprechen, da ja mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0$ verschwinden muß, die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ also beide nach $\mathfrak{A}_0$ fallen. Die Gleichung von α finden wir also, indem wir in (14) $z' = z = z_0$ machen, sie lautet demnach

$$(m-1)z_0 + ay - bx + c = 0. \tag{15}$$

Es ergibt sich so für die Ordinate z_0 des in diese Ebene fallenden Punktes $\mathfrak{A}_0$

$$(m-1)z_0 = -(ay - bx + c),$$

und somit verwandelt sich (14) in

$$z' = mz - (m-1)z_0,$$

oder

$$z' - z_0 = m(z - z_0), \tag{16}$$

d. h. $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0 = m \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$, w. z. b. w.

Wie wir nun zeigen wollen, lassen sich die Koeffizienten in der Gleichung (14) der Affinität immer so bestimmen, daß die Seitenfläche des Fachpolyeders, deren Rand sich auf die Grundebene als das Seileck der äußeren Kräfte projiziert, mit der Grundebene zusammenfällt. Ist nämlich bei dem ursprünglichen Fachpolyeder die Ebene, der diese Seitenfläche angehört, durch die Gleichung dargestellt

$$z = \mathfrak{Z}_\omega - \mathfrak{Y}_\omega x + \mathfrak{X}_\omega y,$$

so muß man, damit diese Ebene in die Ebene $z' = 0$ übergehe,

$$z' = m(z - \mathfrak{X}_\omega y + \mathfrak{Y}_\omega x - \mathfrak{Z}_\omega)$$

annehmen, wobei m willkürlich bleibt. Man kann deshalb auch noch die Ordinate eines Randpunktes in dem transformierten Polyeder willkürlich geben und bestimmt dadurch dann die Transformation vollständig. Es zeigt sich also, daß durch das in der Grundebene liegende Seileck, das nunmehr dem Fachpolyeder selbst angehört, und die Ordinate in einem Randpunkte des ursprünglichen Fachwerks die ganze Raumfigur bestimmt ist.

Die so entstehende Raumfigur deuten wir nun, wie wir es bereits bei den vorher behandelten speziellen Fachwerken getan haben, als eine Zeltfigur über der Grundebene. Die Ecken des Seileckes repräsentieren die Zeltpflöcke, über den Kraftstäben, die von den Ecken des Seilecks ausgehen, liegen die Zeltleinen, die den Rand des das ursprüngliche Fachwerk überdeckenden Zeltdaches an die Zeltpflöcke binden. Die Ordinaten in den Knotenpunkten des Fachwerkes können wir als die Zeltstangen deuten. Dieses drastische Bild veranschaulicht vielleicht am besten das Wesen der Fachwerkfigur.

Von den Randordinaten des Fachwerkes durften wir eine beliebig wählen. Durch sie sind alle anderen Randordinaten eindeutig bestimmt Um diese wirklich zu ermitteln, verbinden wir die von dem Endpunkte der angenommenen Ordinate ausgehende Zeltleine mit einer der beiden angrenzenden Seileckseiten durch eine Ebene, diese schneidet dann aus der Ordinate des benachbarten Randpunktes einen zweiten Eckpunkt des Zeltdachrandes aus. So können wir fortfahren, bis wir ganz um den Rand herumgekommen sind und seine Ordinaten alle bestimmt haben. Es bleiben darauf noch die Ordinaten in den inneren Knotenpunkten des Fachwerks zu finden. Zunächst suchen wir diejenigen

unter ihnen aus, deren Endpunkte mit drei oder mehr Eckpunkten des Zeltrandes einer Ebene angehören und sich auf diese Weise direkt bestimmen lassen. Sodann gibt es möglicherweise noch weitere Eckpunkte der das Zeltdach bildenden Polyederschale, die mit drei der bereits bestimmten Punkte in einer Ebene liegen und demnach sofort zu ermitteln sind. Bleibt schließlich aber ein Stück der Polyederschale über, von dessen Randpunkten keine drei mit einem inneren Eckpunkte in einer Ebene liegen, so haben wir Betrachtungen anzustellen, deren allgemeinen Charakter wir an dem folgenden Beispiele erörtern können.

Wir nehmen an, a, b, c, ... k seien der Reihe nach die Vertikalen der übrigbleibenden Randpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... $\mathfrak{K}$, und von ihnen aus gehe nach dem Inneren des Polyederstückes nur je eine Kante. Diese Kanten mögen die in den Vertikalen a', b', c', ... k' liegenden zweiten Endpunkte haben. Wir legen dann durch die Kante $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ des Randes eine beliebige Ebene η, welche die Ordinaten a' und b' in $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{B}_1'$ schneide, durch die Kante $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}_1'$ eine weitere Ebene, welche die Ordinate c' in $\mathfrak{C}_1'$ treffe, und so fort, bis wir schließlich eine Ebene durch $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$ legen und derart auf der Ordinate a' einen neuen Punkt $\mathfrak{A}_1''$ finden. Dasselbe führen wir noch einmal aus, indem wir statt η_1 irgendeine andere Ebene η_2 durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ legen. Derart mögen wir eine neue Folge von Punkten $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{C}_2'$, ... $\mathfrak{A}_2''$ auf den Ordinaten a', b', c', ... a' bekommen.

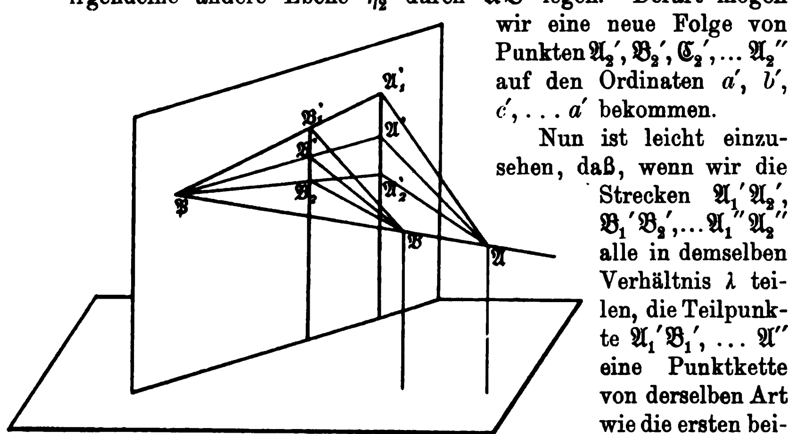


Fig. 42.

Nun ist leicht einzusehen, daß, wenn wir die Strecken $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2'$, ... $\mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}_2''$ alle in demselben Verhältnis λ teilen, die Teilpunkte $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'$, ... $\mathfrak{A}''$ eine Punktkette von derselben Art wie die ersten beiden bilden.

In der Tat wird z. B. die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von den Geraden $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'$ und $\mathfrak{A}_2''\mathfrak{B}_2''$ in demselben Punkte $\mathfrak{P}$ getroffen, und legen wir in

der Vertikalebene, die die letzteren beiden Geraden verbindet, durch $\mathfrak{P}$ eine beliebige neue Gerade, welche die Vertikalen $\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{B}_1' \mathfrak{B}_2'$ in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ trifft, so wird

$$\mathfrak{A}' \mathfrak{A}'_1 : \mathfrak{A}' \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{B}' \mathfrak{B}_1' : \mathfrak{B}' \mathfrak{B}_2' = \lambda,$$

und es liegen auch die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ in einer Ebene.

Das Teilungsverhältnis λ wählen wir insbesondere derart, daß $\mathfrak{A}''$ mit $\mathfrak{A}'$ zusammenfällt, was immer auf eine einzige Art möglich ist. Man führt die Bestimmung dieses Punktes $\mathfrak{A}'$ aus, indem man durch $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ irgend zwei Parallele zieht, und durch $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{A}_2''$ auch zwei Parallele, welche die ersten beiden in $\mathfrak{A}_1'''$ und $\mathfrak{A}_2'''$ schneiden mögen. Die Verbindungslinie $\mathfrak{A}_1''' \mathfrak{A}_2'''$ schneidet dann aus der Vertikalen $\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2'$ den gesuchten Punkt $\mathfrak{A}'$ aus. Die Punktkette $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, ... $\mathfrak{A}'$ aber, zu der dieser Punkt $\mathfrak{A}'$ gehört, besteht aus lauter Eckpunkten der gesuchten Polyederschale.

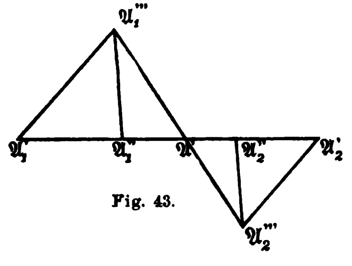


Fig. 43.

Es bedarf nur einer kurzen Überlegung, um erkennen zu lassen, daß, was wir an einem besonderen Falle erörtert haben, sich allgemein anwenden läßt. Wir können nämlich in dem anfänglich entstehenden Ebenenkranz die eine Ebene, die $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{A}_1'$ verbindet, ersetzen durch zwei ebene Dreiecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1'$ und $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1' \mathfrak{A}_1''$, dann bilden die so entstehenden ebenen Flächen von Anfang an den Rand einer Polyederschale. Wenn wir dies allgemein ausdrücken wollen, so haben wir zu sagen: überall, wo wir von einer durch eine Kante willkürlich hindurchgelegten Ebene ausgehen, haben wir uns eine neue Kante eingeführt und eine der Seitenflächen längs dieser Kante geknickt zu denken. Danach ist sofort klar, daß im ganzen ebensoviel solche Knickungen auszuführen sind, als Grade der Willkürlichkeit bei der Anlage der Figur auftreten. Überall aber, wo eine solche Willkürlichkeit auftritt, haben wir dieselbe Konstruktion genau wie in dem obigen Beispiele zweimal auszuführen; aus diesen beiden Bestimmungen setzt sich jedesmal der allgemeine Fall mit Hilfe eines Parameters λ linear zusammen, oder die auf den einzelnen Ordinaten bestimmten Punkte zeigen dasselbe Abstandsverhältnis λ. Dies λ läßt sich aber immer so bestimmen, daß der eingeführte Knick

wieder verschwindet, indem die beiden Seitenflächen, die längs der eingeknickten Kante zusammenstoßen, wieder in eine Ebene fallen. So lassen sich nach und nach alle eingefügten Knicke wieder entfernen, und man erhält zum Schluß eine Polyederschale von der verlangten Art mit der vorgeschriebenen Umrandung, womit die Aufgabe gelöst ist.

Verändert man die ursprünglich willkürlich angenommene Ordinate in irgendwelchem Verhältnisse, so verändern sich auch alle anderen Ordinaten der Figuren in demselben Verhältnisse.

Das beschriebene Vorgehen zur Ermittelung der Polyederschale zeigt eine gewisse Verwandtschaft mit dem früher erörterten Hennebergschen Verfahren zur Lösung des Spannungsproblems.

Infolge der Voraussetzung, daß die ganze Polyederschale durch ihren Rand bestimmt ist, muß die Zahl der Bedingungen, welche durch die Struktur der Polyederschale den Ordinaten in den inneren Knotenpunkten auferlegt wird, gleich der Anzahl k_i der inneren Knotenpunkte selbst sein, und wir finden sonach die einfache Formel

$$k_i = n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \ldots,$$

wenn n_4 die Zahl der viereckigen, n_5 die der fünfeckigen Fächer, n_6 die der sechseckigen Fächer in dem Fachwerke ist usw.

Was die vorstehenden Betrachtungen zeigen, ist, daß man vom Seileck ausgehend durch ganz elementare, wenn auch umständliche Raumkonstruktionen die Zeltfigur gewinnen kann.

Die anzuwendenden Regeln und Kunstgriffe im einzelnen zu verfolgen, würde zu weit führen. Es genügt, ein einfaches Beispiel zu geben. Das in der beistehenden Figur dargestellte Fachwerk besteht aus neun Stäben, von denen durch jeden der sechs vorhandenen Knotenpunkte drei gehen. Die wirkenden äußeren Kräfte bestehen in zwei Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte, die in den Ecken des die Berandung bildenden Rechteckes angreifen und in die Diagonalen dieses Rechteckes fallen. Das Seileck dieser Kräfte ist ein Parallelogramm, das in der Figur das Rechteck umschließt. Die ebenen Flächen, die von den Seileckseiten ausgehen, müssen nun nach einem Punkte, der im Raume über dem Schnittpunkte der Diagonalen liegt und in beliebiger Höhe angenommen werden kann, konvergieren. Danach sind diese Flächen und ist gleichzeitig die über den Seiten des Rechteckes liegende Berandung der Raumfigur über dem Fachwerke

sofort zu finden. Um endlich auch die Lage der Raumpunkte über den beiden inneren Knotenpunkten festzulegen, verlängere man den diese beiden Knotenpunkte verbindenden Stab, bis er zwei Gegenseiten des Rechteckes trifft. Dann muß, wie leicht zu

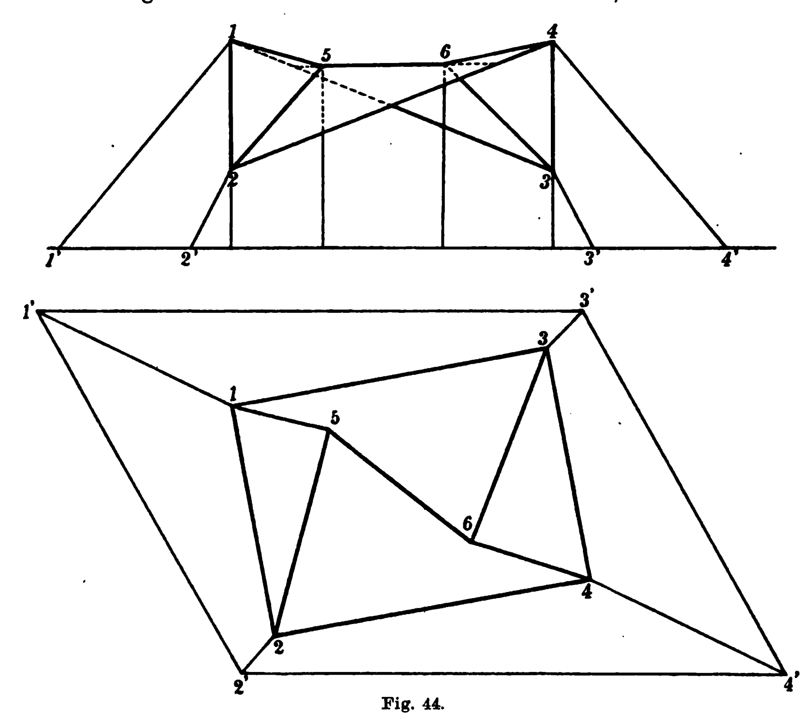


Fig. 44.

sehen ist, auch die Gerade im Raume, die über dem inneren Stabe liegt, die über den beiden Rechteckseiten liegenden Geraden schneiden und ist derart, da diese beiden Schnittpunkte im Aufriß sofort zu finden sind, unmittelbar zu konstruieren. Dadurch ist dann die ganze Raumfigur in einfacher Weise festgelegt und die Aufgabe gelöst.

Schließlich müssen wir noch beachten, daß das Seileck durch die äußeren Kräfte und ihre Wirkungslinien nicht eindeutig bestimmt ist. Gemäß der Raumkonstruktion, die wir für das Seileck gefunden haben, können wir die Zeltseile der Zeltfigur durch

irgend eine Ebene η schneiden. Dann liefern nach den Erörterungen am Schlusse des dritten Kapitels die Projektionen der Schnittpunkte auf die Grundebene die Ecken eines neuen Seileckes. Die Ebene η erzeugt aber aus der Zeltfigur aufs neue ein geschlossenes Polyeder, das sie nach unten hin begrenzt, und dieses geschlossene Polyeder können wir wiederum durch eine Affinität von der betrachteten Art derart transformieren, daß die Ebene η in die Grundebene fällt und sonach die Schnittpunkte von η mit den Zeltseilen direkt in die Ecken des neuen Seileckes übergehen. Das bedeutet aber: Transformiert man die Zeltfigur durch eine Affinität der betrachteten Art, so geht sie wieder in eine Zeltfigur über, bei der genau wie vorher die Schnittpunkte der Zeltseile mit der Grundebene die Ecken eines Seilecks für die äußeren Kräfte des Fachwerkes bilden.

Neuntes Kapitel.

Erweiterungen und Konstruktionsmethoden.

Das Wesentliche des Verfahrens, welches uns zu dem Kräfteplan des erweiterten Fachwerkes führte, bestand darin, daß wir zu einem geschlossenen Polyeder über dem Fachwerk ein reziprokes Polyeder aufsuchten und dieses wieder auf die Grundebene projizierten. Ein Polyeder aber ist zu einem anderen reziprok, wenn jeder Ecke des ersten eine Seitenfläche des zweiten und jeder Seitenfläche des ersten eine Ecke des zweiten entspricht, derart daß den Kanten, die in dem ersten Polyeder durch eine Ecke gehen, in dem zweiten Polyeder die Kanten entsprechen, die eine Seitenfläche umgrenzen. Daß aus zwei solchen Polyedern, wie sie durch ein Nullsystem geliefert werden, zwei reziproke Pläne entstehen, von denen der eine als die Fachwerkfigur, der andere als dessen Kräfteplan aufgeführt werden kann, beruhte darauf, daß zwei einander zugeordnete Kanten der beiden Polyeder sich auf eine zur Achse des Nullsystems senkrechte Ebene als parallele Strecken projizieren.

Die Forderung, daß solche zwei Strecken parallel sein sollen, könnte aber ebenso gut auch durch die andere Forderung ersetzt werden, daß sie einen konstanten Winkel ε miteinander bilden müssen. In der Tat können wir uns einen bereits gefundenen

Kräfteplan in seiner Ebene irgendwie herumgedreht denken, ohne daß er seine Bedeutung für die Darstellung der Spannungskräfte in dem Fachwerk verliert, da er ja an sich völlig ungeändert bleibt.

Auf der anderen Seite ist es durchaus unwesentlich, daß das reziproke Polyeder im Raume durch ein Nullsystem geliefert wird, es könnte ebenso auch durch irgend eine andere reziproke Zuordnung (insbesondere durch das Polarsystem einer Fläche zweiter Ordnung) gewonnen werden. Die Grundgleichung des Nullsystems

$$z - \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x \tag{1}$$

ist dann durch die Gleichung zu ersetzen, welche in entsprechender Weise die Koordinaten (x, y, z) und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ zweier konjugierten Punkte der neuen Reziprozität miteinander verbindet. Die Form dieser Gleichung kann die einer allgemeinen bilinearen Beziehung zwischen den beiden Koordinatentripeln sein. Bei einer solchen allgemeinen Beziehung werden die Projektionen zweier reziproken Linien, d. h. zweier Geraden, bei denen jeder Punkt der einen jedem Punkte der anderen konjugiert ist, für gewöhnlich nicht einen konstanten Winkel miteinander bilden. Wir wollen aber nachweisen, daß diese Forderung erfüllt ist, wenn wir der bilinearen Gleichung die folgende besondere Gestalt geben:

$$\begin{aligned} &Px + Qy + Rz \\ &= A(\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y) + B(\mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x) + C\mathfrak{X} + D\mathfrak{Y} + E\mathfrak{Z} + F. \end{aligned} \tag{2}$$

Sind dann die Punkte

$$(\mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Y}_\alpha, \mathfrak{Z}_\alpha), (\mathfrak{X}_\beta, \mathfrak{Y}_\beta, \mathfrak{Z}_\beta)$$

beide konjugiert zu den zwei Punkten

$$(x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &P(x_b - x_a) + Q(y_b - y_a) + R(z_b - z_a) \\ &= (A\mathfrak{X}_\alpha - B\mathfrak{Y}_\alpha)(x_b - x_a) + (B\mathfrak{X}_\alpha + A\mathfrak{Y}_\alpha)(y_b - y_a) \\ &= (A\mathfrak{X}_\beta - B\mathfrak{Y}_\beta)(x_b - x_a) + (B\mathfrak{X}_\beta + A\mathfrak{Y}_\beta)(y_b - y_a), \end{aligned}$$

woraus weiter folgt

$$\begin{aligned} &A[(\mathfrak{X}_\beta - \mathfrak{X}_\alpha)(x_b - x_a) + (\mathfrak{Y}_\beta - \mathfrak{Y}_\alpha)(y_b - y_a)] \\ &= B[(\mathfrak{Y}_\beta - \mathfrak{Y}_\alpha)(x_b - x_a) - (\mathfrak{X}_\beta - \mathfrak{X}_\alpha)(y_b - y_a)]. \end{aligned}$$

Macht man nun

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_\beta - \mathfrak{X}_\alpha &= S_{\alpha\beta}\cos\varphi_{\alpha\beta}, & \mathfrak{Y}_\beta - \mathfrak{Y}_\alpha &= S_{\alpha\beta}\sin\varphi_{\alpha\beta},\\ x_b - x_a &= s_{ab}\cos\psi_{ab}, & y_b - y_a &= s_{ab}\sin\psi_{ab}, \end{aligned}$$

so heben sich aus der letzten Gleichung $S_{\alpha\beta}$, s_{ab} sofort heraus, und sie geht über in die einfache Form

$$A\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \psi_{ab}) = B\sin(\varphi_{\alpha\beta} - \psi_{ab}),$$

oder

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{A}{B},$$

wenn wir

$$(3\text{a})\qquad \varepsilon = \varphi_{\alpha\beta} - \psi_{ab}$$

setzen. $\varphi_{\alpha\beta}$ ist aber der Winkel, den die Strecke $(\alpha\beta)$ im Kräfteplan mit der x-Achse einschließt, und ψ_{ab} der analoge Winkel für die korrespondierende Strecke ab im Lageplan, ε ist demnach der Winkel, den diese beiden einander zugeordneten Strecken miteinander bilden, und die Gleichung (4) zeigt, daß dieser Winkel konstant, d. h. derselbe für alle Paare entsprechender Strecken in den beiden reziproken Plänen wird, was zu beweisen war.

Insbesondere wird $\varepsilon = 90^0$, wenn wir $B = 0$ machen. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir die Gleichung (2) in der ganz einfachen Form annehmen

$$(5)\qquad z + \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y,$$

welche das Polarsystem eines Rotationsparaboloids darstellt. Dieses Polarsystems hat sich Maxwell bei seinen Untersuchungen über reziproke Pläne bedient, dem die grundlegenden Ideen dieser Theorie zu verdanken sind. Nach ihm hat Cremona das Nullsystem zur Herstellung der reziproken Pläne verwendet und sich um die Verbreitung und praktische Ausgestaltung der Lehre Verdienste erworben, die Maxwells viel tiefer greifende Forschungen in den Hintergrund drängten, um so mehr, als der Begründer der graphischen Statik, Culmann, sich lebhaft Cremona zu- und von Maxwell abwandte.

Hauck hat gezeigt, daß man statt des Rotationsparaboloids auch eine beliebige rotatorische Mittelpunktsfläche verwenden kann, deren Achse wie die des Paraboloids auf der Grundebene senkrecht steht, wenn man nur die orthogonale Parallelprojektion

auf die Grundebene für den Kräfteplan durch eine Zentralprojektion aus dem Mittelpunkte der Rotationsfläche ersetzt.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir die Gleichung der Rotationsfläche in der Form an:

$$M(x^2 + y^2) + N(z - c)^2 = 1. \tag{5}$$

Die Gleichung ihres Polarsystems ist dann

$$M(\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y) + N(\mathfrak{Z} - c)(z - c) = 1. \tag{6}$$

Bilden wir diese Gleichung wieder für zwei Punkte (x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b), so finden wir die Gleichungen

$$M(\mathfrak{X}x_a + \mathfrak{Y}y_a) + N(\mathfrak{Z} - c)(z_a - c) = 1,$$
$$M(\mathfrak{X}x_b + \mathfrak{Y}y_b) + N(\mathfrak{Z} - c)(z_b - c) = 1,$$

in denen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Veränderlichen sind.

Diese Gleichungen stellen zwei Ebenen dar, die durch die zu der Verbindungslinie ab reziproke Linie $(\alpha\beta)$ hindurchgehen. Die Gleichung der Ebene, welche dieselbe Linie $(\alpha\beta)$ aus dem Mittelpunkte der Fläche projiziert, ergibt sich durch einfache Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen und lautet

$$M[\mathfrak{X}(x_b - x_a) + \mathfrak{Y}(y_b - y_a)] + N(\mathfrak{Z} - c)(z_b - z_a) = 0,$$

die Schnittlinie dieser Projektionsebene mit der Grundebene $\mathfrak{Z} = 0$ hat demnach in laufenden Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Gleichung

$$M[\mathfrak{X}(x_b - x_a) + \mathfrak{Y}(y_b - y_a)] - Nc(z_b - z_a) = 0.$$

Nehmen wir auf der so gefundenen Projektionslinie zwei beliebige Punkte $(\mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Y}_\alpha)$ und $(\mathfrak{X}_\beta, \mathfrak{Y}_\beta)$ an, so wird

$$M[\mathfrak{X}_\alpha(x_b - x_a) + \mathfrak{Y}_\alpha(y_b - y_a)] = Nc(z_b - z_a)$$
$$M[\mathfrak{X}_\beta(x_\beta - x_a) + \mathfrak{Y}_\beta(y_b - y_a)] = Nc(z_b - z_a)$$

und damit

$$(\mathfrak{X}_\beta - \mathfrak{X}_\alpha)(x_b - x_a) + (\mathfrak{Y}_\beta - \mathfrak{Y}_\alpha)(y_b - y_a) = 0.$$

Machen wir hierin die Substitutionen (3), so ergibt sich mit Rücksicht auf (3a) sofort

$$\cos \varepsilon = 0,$$

also $\varepsilon = 90^0$, womit der geforderte Nachweis geliefert ist.

Wir unterwerfen nun noch die Rotationsfläche (6) einer perspektiv affinen Transformation, bei welcher die Punkte der Grund-

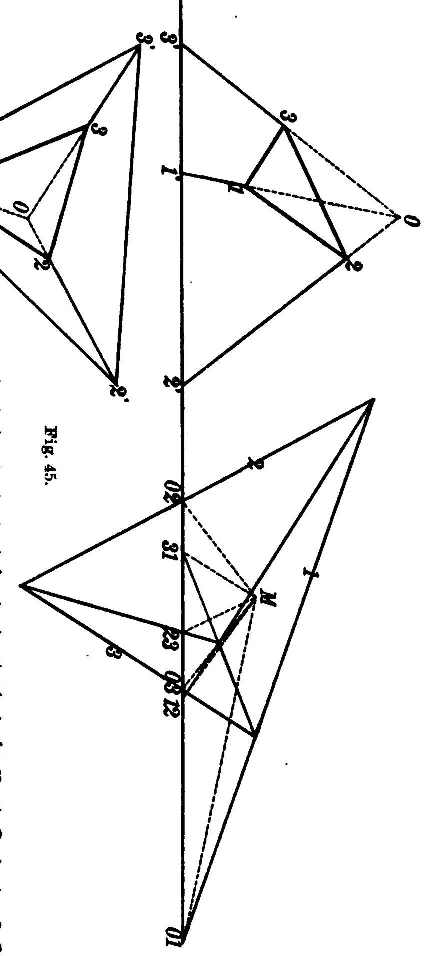
ebene ungeändert bleiben und die übrigen Punkte sich in einer bestimmten Richtung um eine Strecke verschieben, die ihrem Abstande von der Grundebene proportional ist. Die Fläche, welche so aus der Rotationsfläche hervorgeht, ist eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung, die von den der Grundebene parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird. In der Tat erfahren bei der auszuführenden Transformation die Punkte einer solchen Ebene eine einfache Parallelverschiebung, die Kreise, in denen diese zu der Rotationsachse senkrechten Ebenen die Rotationsfläche schneiden, gehen also wieder in Kreisschnitte der transformierten Fläche über, die aufs neue in einer zur Grundebene parallelen Ebene liegen. Die Polarebene eines Punktes bezüglich der alten Fläche geht in die Polarebene des transformierten Punktes bezüglich der neuen Fläche über. Der Mittelpunkt der neuen Fläche geht aus dem Mittelpunkte der alten Fläche hervor. Die Zentralprojektion aus dem Mittelpunkte bleibt also nach der Transformation erhalten. Die orthogonale Projektion der Fachwerkfigur aber verwandelt sich, da die affine Transformation parallele Linien immer wieder in parallele Linien überführt, in eine schiefe Parallelprojektion der neuen Figur, durch die dasselbe Fachwerk hervorgeht. Die Rotationsachse der Rotationsfläche verbindet die Punkte, in denen die zu der Grundebene parallelen Tangentialebenen die Fläche berühren. Also verbindet auch nach der affinen Transformation der Durchmesser der Fläche, der in die Projektionsrichtung fällt, die Berührungspunkte der zwei zu der Grundebene parallelen Tangentialebenen, d. h. aber, er ist zu der Stellung der Grundebene konjugiert. Er enthält daher auch die Mittelpunkte aller der zur Grundebene parallelen Kreisschnitte. Demnach ergibt sich:

Um aus dem Polarsystem einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung zwei reziproke Pläne herzuleiten, projiziere man die Fachwerkfigur auf eine Ebene, die zu einem Kreisschnitt parallel ist, in der Richtung des zu dieser Ebenenstellung konjugierten Durchmessers der Fläche; man projiziere ferner die zu der Fachwerkfigur bez. der Fläche polarreziproke Figur aus dem Flächenmittelpunkte auf dieselbe Ebene. Diese Projektion liefert dann einen Kräfteplan zu dem aus der Projektion der Fachwerkfigur erhaltenen Fachwerke.

Ist die Fläche zweiter Ordnung insbesondere eine Kugel, so erhält man, da hier eine jede Linie senkrecht ist zu der Ebene,

welche ihre reziproke Polare mit dem Kegelmittelpunkte M verbindet, folgende einfache, von *Hauck* angegebene Regel:

Man lege durch einen festen Raumpunkt M zu jeder Kante der Fachwerkfigur die normale Ebene. Die so entstehenden Ebenen schneiden dann die Grundebene in den Linien des Kräfteplans, der zu dem durch orthogonale Projektion der Fachwerkfigur auf die Grundebene entstehenden Fachwerke gehört.


Fig. 45.

Wir wollen ein einfaches Beispiel benutzen, um an ihr das in der vorstehenden Regel enthaltene *Hauck*sche Verfahren zu illustrieren. Es ist das in der beistehenden Figur behandelte, wo das Fachwerk sich auf ein einziges Dreieck reduziert. Man kann die ganze entstehende Figur deuten als eine über der Grundrißebene stehende dreiseitige Pyramide, die schräg abgeschnitten wird. Den Punkt im Raume, durch den die Normalebenen zu den einzelnen Geraden der Raumfigur gelegt werden, können wir als einen beliebigen Punkt M in der Aufrißebene annehmen. Die Schnittlinien einer der Normalebenen mit der Aufriß- und Grundrißebene sind nun zu den Geraden, in denen sich die Gerade im Raume auf die Aufriß- und Grundrißebene projiziert, beziehentlich senkrecht und schneiden sich außerdem auf der trennenden Achse von

Grundriß und Aufriß. Danach ist die räumliche Konstruktion auf die ebene Darstellung sofort zu übertragen.

Wir bezeichnen die Spitze der dreiseitigen Pyramide mit 0, die Ecken ihres schrägen Schnittes mit 1, 2, 3, mit 01 die Verbindungslinie der Punkte 0, 1 usw. sowohl im Aufriß wie im Grundriß. Dann ziehen wir im Aufriß durch *M* zu den Linien 01 usw. die Senkrechten, deren Schnittpunkte mit der Achse ebenso bezeichnet seien wie die Linien selbst. Durch diese Schnittpunkte ziehen wir weiter die Senkrechten zu den gleichbezeichneten Linien des Grundrisses. Auf diese Weise entsteht der Kräfteplan, der in diesem Falle einfach aus einem Dreiecke 1 2 3 und den von dessen Ecken nach einem Punkte *O* konvergierenden Strecken besteht. Die Dreiecksseiten 1, 2, 3 sind der Reihe nach zu den Strahlen 01, 02, 03 im Grundriß senkrecht und die durch *O* gehenden Strecken zu den Seiten des Dreiecks 1 2 3 im Grundriß.

Diesem Verfahren ist an Einfachheit und Übersichtlichkeit ein anderes ebenbürtig, das wieder an die Theorie des Nullsystems anknüpft. Wir erörtern es ebenfalls an einem ganz einfachen Beispiele: einem Fachwerke, das aus zwei Dreiecken 123 und 234 besteht. Wir

Fig. 46.

konstruieren ein Seilpolygon für die äußeren Kräfte, dessen Ecken wir mit A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04} bezeichnen. Dann nehmen wir an, die zugehörige Raumfigur sei gefunden, und bezeichnen in ihrem Aufriß die Punkte ebenso wie die entsprechenden Punkte des Grundrisses. In der Raumfigur treten sechs Ebenen auf, die wir mit den römischen Ziffern I bis VI charakterisieren wollen. Vier von ihnen, I bis IV, schneiden die Grundrißebene in den Seiten C_{I}, C_{II}, C_{III}, C_{IV} des Seilecks; C_{V} und C_{VI} seien in analoger Weise die Spuren der letzten beiden Ebenen.

Um diese Spuren allgemein zu finden, haben wir die Punkte A_{ik} einzuführen, in denen die Kanten ik der Raumfigur oder ihre Verlängerungen die Grundrißebene durchstoßen und die wir der Kürze halber als die Pole des Fachwerkes bezeichnen wollen. Die Pole sind den Stäben des Fachwerkes in eindeutiger Weise zugeordnet und liegen auf ihnen selbst oder ihren Verlängerungen. Dabei liegen eine Anzahl von Polen immer in gerader Linie, wenn die zugehörigen Stäbe ein Fach des Fachwerkes begrenzen. Außerdem liegen je zwei Ecken des Seileckes A_{0i} der äußeren Kräfte mit einem der Pole in gerader Linie.

Auf diese Weise lassen sich auch leicht die unendlich vielen Seilecke ableiten, die noch möglich sind, wenn schon die Raumfigur über dem eigentlichen Fachwerke (d. h. die Ordinate in jedem Knotenpunkte des Fachwerks) gegeben vorliegt. Außerdem können die Wirkungslinien aller äußeren Kräfte mit Ausnahme einer einzigen beliebig gegeben sein, dann legt man durch einen der Pole, die auf einer Seileckseite liegen sollen, in der Figur z. B. A_{12}, die erste Seileckseite beliebig. Die Ecken des Seilecks, die auf dieser liegen und den Wirkungslinien der äußeren Kräfte in 1 und 2 angehören, mögen mit A_{01} und A_{02} bezeichnet sein. Die Verbindungslinie von A_{02} und A_{24} liefert eine weitere Ecke A_{04} des Seilecks auf der gegebenen Wirkungslinie der Kraft, die in 4 angreift. Verbinden wir A_{13} mit A_{01} und A_{34} mit A_{04}, so erhalten wir als Schnittpunkt dieser Verbindungslinien die vierte und letzte Ecke A_{03} des Seilecks, und wenn wir den so gefundenen Punkt mit dem Knotenpunkt 3 verbinden, auch die Wirkungslinie der letzten äußeren Kraft.

Lassen wir nun die erste Seileckseite sich um A_{12} drehen, so drehen sich auch die anderen Seileckseiten um die Pole, die auf ihnen liegen, so daß die Ecken des Seilecks auf den gegebenen Wirkungslinien der äußeren Kräfte fortlaufen. Nur die letzte

Ecke des Seilecks, für die die Wirkungslinie nicht gegeben ist, beschreibt einen Kegelschnitt, der durch den zugehörigen Knotenpunkt (3) des Fachwerkes hindurch geht. Ist nun auch die letzte Wirkungslinie gegeben, so ist der letzte Seileckpunkt (A_{03}) auf dem Kegelschnitt, dem er angehört, eindeutig festgelegt (als zweiter Schnittpunkt des Kegelschnittes und der letzten Wirkungslinie, die beide durch den letzten Knotenpunkt gehen). So ist dann auch das ganze Seileck in eindeutiger Weise festgelegt, und es läßt sich durch eine Konstruktion bestimmen, die nichts anderes als das Ziehen von geraden Linien erfordert, also mit dem Lineal allein ausführbar ist.

Nehmen wir zu den Seileckseiten die Geraden hinzu, auf denen drei oder mehr Pole des Fachwerkes liegen und welche die Grundrißspuren der ebenen Flächen in der Raumfigur des Fachwerkes bilden, so erhalten wir eine ebene Figur, welche wir als das erweiterte Seileck des Fachwerkes bezeichnen können. Aus ihr ist der Kräfteplan sofort herzuleiten, indem man ganz ebenso wie beim einfachen Seileck durch einen Kräftepol O die Parallelen zu allen Seileckseiten zieht. Diese Parallelen seien ebenfalls mit den Ziffern I bis VI bezeichnet. Auf einer dieser Parallelen, etwa I, nimmt man den Punkt C_{I} beliebig an, und zieht dann bis zur Parallelen II die Strecke $C_{\mathrm{I}}\,C_{\mathrm{II}}$ parallel zu der Wirkungslinie der Kraft, die durch den Schnittpunkt der Seileckseiten $C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}$ hindurchgeht, und ebenso die Strecken $C_{\mathrm{II}}\,C_{\mathrm{III}}$, $C_{\mathrm{III}}\,C_{\mathrm{IV}}$, $C_{\mathrm{IV}}\,C_{\mathrm{I}}$. Darauf muß man z. B. die Strecke $C_{\mathrm{I}}\,C_{\mathrm{V}}$ zwischen den Parallelen I und V parallel zu dem Stabe des Fachwerks ziehen, dessen Pol, A_{12}, der Schnittpunkt der Seileckseiten C_{I}, C_{V} ist. Ebenso werden $C_{\mathrm{II}}\,C_{\mathrm{V}}$, $C_{\mathrm{II}}\,C_{\mathrm{VI}}$, $C_{\mathrm{III}}\,C_{\mathrm{VI}}$ und endlich $C_{\mathrm{V}}\,C_{\mathrm{VI}}$ gezogen, wobei natürlich schon durch weniger Strecken der ganze Kräfteplan, den wir auf diese Weise bekommen, bestimmt ist.

Die Begründung dieses Verfahrens beruht darauf, daß man die Vertikale in O als die Achse des zugrunde gelegten Nullsystems ansieht. Dann müssen die Lote, die man von den Nullpunkten aller ebenen Flächen der Fachwerfigur auf die Achse des Nullsystems fällt und die in diesen Ebenen liegen, deren Grundrißspuren parallel sein, ihre Projektionen auf die Grundrißebene fallen also mit den durch O gezogenen Strahlen zusammen. Ferner müssen von den Strecken, welche diese Nullpunkte verbinden, d. h. von den Kanten der zu der Fachwerkfigur reziproken Raumfigur, die Projektionen auf die Grundrißebene den korrespondieren-

den Stäben des erweiterten Fachwerkes parallel sein, wie es die in der gezeichneten Figur enthaltenen Verbindungsstrecken der Punkte C_{I} bis C_{VI} wirklich sind. Wenn die Projektion der reziproken Raumfigur also nicht die gezeichnete Figur ergibt, so muß sie doch jedenfalls eine zu dieser ähnliche und ähnlich liegende Figur liefern, so daß für beide Figuren O das Ähnlichkeitszentrum ist. Auf die absolute Größe der gezeichneten Figur kommt es aber gar nicht an, man kann sowohl den Maßstab für die Kräfte noch willkürlich wählen als auch alle Spannungskräfte, die in dem erweiterten Fachwerk wirken, in demselben Verhältnisse verändern. So sieht man in der Tat, daß die gezeichnete Figur keine andere ist wie die Figur des Kräfteplans.

Literatur.

Die folgenden Literaturnachweise sind so aufzufassen, daß sie den Nachweis über die benutzten Quellen und einen Wegweiser zur weiteren Orientierung auf dem behandelten Gebiete liefern sollen, auf absolute Vollständigkeit aber keinen Anspruch machen.

Lehrbücher.

Culmann, C., Die graphische Statik. 2. Aufl. 1875.
Tetmajer, L., Brücken- und Dachstuhlkonstruktionen. 1875.
Petersen, J., Statik. Deutsch v. Fischer-Benzon. 1882.
Lévy, M., La statique graphique. 2. Aufl. 4 Bde. 1886—1888.
Müller-Breslau, H., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 2 Bde. 4. Aufl. 1907.
Henneberg, L., Statik der starren Systeme. 1886.
— Lehrbuch der graphischen Statik. 1910.
Ritter, W., Anwendungen der graphischen Statik. 4 Teile. 1888—1906.
Lauenstein, R., Die graphische Statik. 9. Aufl. 1906.
Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. II. Graphische Statik. 2. Aufl. 1903.
Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik. 1906.

Abhandlungen und Monographien.

Rankine, M., Principle of the equilibrium of polyhedral frames, Philosophical Magazine (4), Vol. 27 (1864), p. 92.
Clerk Maxwell, J., On reciprocal figures and diagrams of forces, Philosophical Magazine (4) Vol. 27 (1864), p. 250. On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. Transactions of the Roy. Society of Edinburgh, Vol. 26 (1872), p. 1. On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 2 (1876), p. 407. Alle diese Arbeiten vereinigt in seinen Scientific Papers, Vol. I, p. 514, Vol. II, p. 161, 492.
Jenkin, Fl., On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains in framework. Transactions of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 25 (1869), p. 441.
Bow, R. H., Economies of construction in relation to framed structures. London 1873.
Cremona, L., Le figure reciproche nella statica grafica. 1872. 3. Aufl. 1879. Französische Übersetzung von Bossut 1885.
Favero, G. B., Intorno alle figure reciproche nella statica grafica. Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, (3) Vol. 2 (1875), p. 455.
Padeletti, D., Studi sui diagrammi reciproci. Giornale di matematica, Vol. 17 (1879), p. 339.
Steiner, F., Über die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Wien 1879.
Eddy, H. T., On the two general reciprocal methods in graphical statics. American Journal of mathematics, Vol. 1 (1878), p. 322.

Föppl, A., Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.
Hollender, H. J., Über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften. Leipzig 1896.
Hauck, G., Über die reziproken Figuren der graphischen Statik. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100 (1887), S. 365; Bd. 120 (1899), S. 109.
Schur, F., Über ebene einfache Fachwerke. Math. Annalen, Bd. 48 (1897), S. 142.
Klein, F. und K. Wieghardt, Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme. Archiv d. Math. u. Phys. (3), Bd. 8 (1903), S. 1, 95.
Liebmann, H., Der Fundamentalsatz der Statik ebener Fachwerke. Berichte d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften, Math. Klasse, Bd. 58, 1906, S. 50.
Rogel, F., Über die graphische Zusammensetzung von Kräften. Sitzungsberichte d. K. Böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, Prag 1905, Nr. 20.
Schlink, W., Statik der Raumfachwerke. Leipzig 1907.
Wellstein, J., Abschnitt Graphik in Weber und Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band III. Leipzig 1907.

Dazu die zusammenfassenden Referate:

Henneberg, L., Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der ebenen Fachwerke. Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 3 (1894).
— Die graphische Statik der starren Körper. Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, Bd. IV: Mechanik, 1. Teilband, S. 345.

Speziell das Nullsystem betreffend vgl. man:

Giorgini, G., Memorie della Società italiana delle Scienze, Vol. 20 (1827).
Möbius, A. F., Journal für Mathematik. Bd. 10 (1833), S. 317, Werke I, S. 469. Lehrbuch der Statik. 1837. Bd. 1, § 86, Werke III, S. 122. S. auch Journal f. Math. Bd. 3, S. 273, Werke I, S. 429.
Staudt, Ch. v., Geometrie der Lage (1847), § 24. Beiträge zur Geometrie der Lage (1856), § 34.
Reye, Th., Geometrie der Lage, Bd. 2, 4. Aufl. 1907, S. 110.
Hauck, G., Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 31 (1886), S. 362.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Teubner in Leipzig und Berlin

wirkung von: M. Abraham, C. Cranz, P. u. T. walder, O. Fischer, Ph. Forchheimer, Ph. Furt-, L. Henneberg, K. Heun, G. Jung, A. Kriloff, Love, R. v. Mises, L. Prandtl, H. Reißner, A. Schoenflies, P. Stäckel, O. Tedone, E. Timerding, A. Timpe, A. Voß, G. T. Walker, G. Zemplén, herausgegeben von F. Klein-Göttingen und C. H. Müller-Göttingen. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV in 4 Teilbänden. Man verlange Prospekt!

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

- I. Band. Einführung in die Mechanik. 3. Auflage. Mit 186 Figuren im Text. [XVI u. 428 S.] 1905. n. *M* 10.—
- II. — Graphische Statik. 2. Auflage. Mit 176 Figuren im Text. [XII u. 471 S.] 1903. n. *M* 10.—
- III. — Festigkeitslehre. 4. Auflage. Mit 86 Figuren im Text. [XVI u. 426 S. 1909. n. *M* 10.—
- IV. — Dynamik. 3., stark veränderte Auflage. Mit 71 Figuren im Text. [VIII u. 422 S.] 1909. Geb. n. *M* 10.—
- V. — Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Mit 44 Figuren im Text. [XII u. 391 S.] 1907. n. *M* 10.—
- VI. — Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Mit 30 Figuren im Text. [XII u. 490 S.] 1910. ca. n. *M* 10.—

—— das Fachwerk im Raume. Mit zahlreichen Figuren im Text und 2 lithographischen Tafeln. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1892. Geh. *M* 3.60, in Leinwand geb. *M* 4.40.

Freytag, Ludwig, Ingenieur und Staatsbauassistent bei der Kgl. obersten Baubehörde zu München, Vereinfachung in der statischen Bestimmung elastischer Balkenträger. Mit vielen Figuren im Text. [VIII u. 123 S.] gr. 8. 1898. Geh. n. *M* 3.—

Henneberg, Geheimer Hofrat Dr. **L.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der graphischen Statik. gr. 8. In Leinwand geb. [Unter der Presse.]

Hollender, Herm. Jos., über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Inhalten, Schwerpunkten, statischen Momenten und Trägheitsmomenten ebener Gebilde. Mit 4 lithographischen Tafeln. [VI u. 44 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. *M* 3.—

Ostendorf, Dr. **F.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Geschichte des Dachwerks, erläutert an einer großen Anzahl mustergültiger alter Konstruktionen. Mit vielen Abbildungen. [VI u. 269 S.] gr. 4. 1908. Geh. n. *M* 28.—

Ostenfeld, Dr. **A.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen, technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe von D. Skouge. Mit 336 Figuren auf 33 Tafeln. [VIII u. 456 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Jahnke-Schriften. 1109.